풀이

STEP II 2022, 문제 7

순수수학 • 복소 다항식의 근

> **STEP II 2022, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

방정식 $\mathrm{h}(w) = 0$은 자연스럽게 $w^5(nw+1) = -(w+n)$의 꼴로 나뉘고, 양변의 절댓값(modulus)을 취하면 $|w|$에 관한 명제만 남는다. 모든 근이 단위원(unit circle) 위에 있다는 것을 알고 나면, 실수가 아닌 각 근은 그 켤레복소수(conjugate)와 짝을 이루는데, 이 켤레복소수는 바로 그 근의 역수(reciprocal)이기도 하다. 이로부터 이차 인수(quadratic factor)들을 얻고, 그다음은 계수 비교(comparing coefficients)와 부호에 관한 논증만 하면 된다.

풀이

소문항 (i)

(a) $\mathrm{h}(w) = 0$의 항들을 다음과 같이 묶는다.

$$w^5(nw+1) = -(w+n).$$

두 괄호 모두 0이 될 수 없다. $n \geq 2$이므로, $w = -1/n$이면 $\mathrm{h}(w) = n - \frac{1}{n} \neq 0$이고, $w = -n$이면 $\mathrm{h}(w) = n^5(n^2-1) \neq 0$이다. 절댓값을 취하고 제곱하면

$$|w^5|^2\,|nw+1|^2 = |w+n|^2.$$

임의의 복소수 u와 실수 c에 대하여 $|u+c|^2 = (u+c)(\bar{u}+c) = |u|^2 + 2c\,\mathrm{Re}(u) + c^2$이다. 따라서

$$|w+n|^2 = |w|^2 + 2n\,\mathrm{Re}(w) + n^2 = \mathrm{f}(w),$$
$$|nw+1|^2 = n^2|w|^2 + 2n\,\mathrm{Re}(w) + 1 = \mathrm{g}(w).$$

두 값 모두 양수이므로 $|w^5|^2 = \mathrm{f}(w)/\mathrm{g}(w)$이다. 양의 제곱근을 취하면 요구한 대로 $|w^5| = \sqrt{\mathrm{f}(w)/\mathrm{g}(w)}$를 얻는다.

(b) 두 식의 차에서는 $\mathrm{Re}(w)$ 항이 소거된다.

$$\mathrm{f}(w) - \mathrm{g}(w) = n^2 + |w|^2 - n^2|w|^2 - 1 = (n^2-1)(1-|w|^2).$$

귀류법(proof by contradiction)으로, $|w| < 1$이라고 가정하자. $n^2 - 1 > 0$이므로 $\mathrm{f}(w) > \mathrm{g}(w) > 0$이고, 따라서 $\mathrm{f}(w)/\mathrm{g}(w) > 1$이다. (a)에 의하여 $|w|^5 > 1$이므로 $|w| > 1$인데, 이는 $|w| < 1$에 모순이다. 그러므로 $|w| \geq 1$이다.

(c) 같은 논증을 반대 방향으로 적용할 수 있다. $|w| > 1$이면 $\mathrm{f}(w) < \mathrm{g}(w)$이므로 $|w|^5 < 1$, 즉 $|w| < 1$이 되어 모순이다. 따라서 $|w| \leq 1$이기도 하고, (b)와 합치면 $|w| = 1$이다.

> **생각해 보기** $|w| \leq 1$임을 더 깔끔하게 보이는 방법은 없을까?

있다. 계수 $n, 1, 0, 0, 0, 1, n$은 거꾸로 읽어도 같으므로 $z^6\,\mathrm{h}(1/z) = \mathrm{h}(z)$이다. 따라서 w가 근이면 $1/w$도 근이고, (b)를 $1/w$에 적용하면 $|w| \leq 1$을 얻는다.

소문항 (ii)

(a) h는 실수 계수 다항식이므로, 실수가 아닌 근은 켤레복소수끼리 짝을 지어 나타난다. 여섯 개의 근은 서로 다르고 모두 실수가 아니므로, 세 쌍 w_k, $\bar{w}_k$ $(k = 1, 2, 3)$를 이룬다. 소문항 (i)에 의하여 $|w_k| = 1$이므로 $w_k\bar{w}_k = 1$이고,

$$(z - w_k)(z - \bar{w}_k) = z^2 - (w_k + \bar{w}_k)z + w_k\bar{w}_k = z^2 - a_k z + 1,$$

이다. 여기서 $a_k = 2\,\mathrm{Re}(w_k)$는 실수이다. 다항식 h는 6차이고 최고차항의 계수(leading coefficient)가 n이므로

$$\mathrm{h}(z) = n(z^2 - a_1 z + 1)(z^2 - a_2 z + 1)(z^2 - a_3 z + 1).$$

(b) 곱에서 z^5 항은 한 인수에서 $-a_k z$를, 나머지 두 인수에서 z^2을 택할 때 생기므로, z^5의 계수는 $-n(a_1 + a_2 + a_3)$이다. h에서 이 계수는 1이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 = -\frac{1}{n}.$$

(c) 먼저 두 인수를 곱한다.

$$(z^2 - a_1 z + 1)(z^2 - a_2 z + 1) = z^4 - (a_1 + a_2)z^3 + (2 + a_1 a_2)z^2 - (a_1 + a_2)z + 1.$$

여기에 $z^2 - a_3 z + 1$을 곱하면, z^3 항은 $z^3 \times 1$, $z^2 \times (-a_3 z)$, $z \times z^2$에서 나온다.

$$-(a_1 + a_2) - a_3(2 + a_1 a_2) - (a_1 + a_2) = -2(a_1 + a_2 + a_3) - a_1 a_2 a_3.$$

h에는 z^3 항이 없으므로 $a_1a_2a_3 = -2(a_1 + a_2 + a_3)$이고, (b)에 의하여

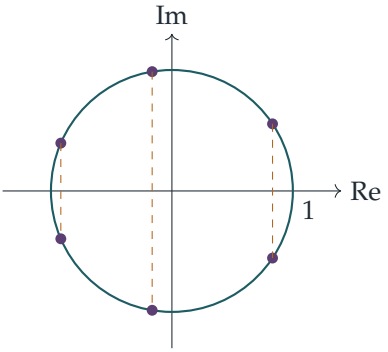
$$a_1a_2a_3 = \frac{2}{n}.$$

(d)

> **생각해 보기** a_k의 부호로부터 실수부에 대해 무엇을 알 수 있을까?

각 켤레 쌍 $w_k, \bar{w}_k$는 같은 실수부(real part) $\mathrm{Re}(w_k) = a_k/2$를 가진다. 따라서 실수부가 음수인 근의 개수는 음수인 a_k의 개수의 두 배이다.

$a_1a_2a_3 = 2/n > 0$이므로 a_k 중 0인 것은 없고, 음수인 것은 짝수 개, 즉 0개 또는 2개이다. $a_1 + a_2 + a_3 = -1/n < 0$이므로 셋 모두 양수일 수는 없다. 따라서 a_k 중 정확히 두 개는 음수이고 하나는 양수이며, 여섯 개의 근 중 **네 개**의 실수부가 음수이다.



그림은 $n = 2$인 경우이다. 여섯 개의 근은 단위원 위에 세 개의 켤레 쌍으로 놓여 있고, 그중 두 쌍은 허수축(imaginary axis)의 왼쪽에 있다.

검산

- 실근이 없다는 것을 확인하는 차원에서, $\mathrm{h}(1) = 2n + 2$와 $\mathrm{h}(-1) = 2n - 2$가 모두 0이 아님에 주목하자. 근이 단위원 위에 있으므로 실근이 될 수 있는 후보는 ± 1뿐이다.
- $n = 2$일 때 수치적으로 풀면 $a_k \approx -1.8368,\ -0.3272,\ 1.6640$이다. 이들의 합은 $-0.5 = -\frac{1}{2}$, 곱은 $1.000 = \frac{2}{2}$이고, 두 개가 음수이므로 (b), (c), (d)와 일치한다. $n = 2, \ldots, 29$에 대해 컴퓨터로 확인한 결과, 매번 모든 근의 절댓값이 1이고 네 개의 근의 실수부가 음수였다.

흔한 실수

- $w = -1/n$이 근이 아님을 확인하지 않고 $nw + 1$로 나누는 것.

- (c)에서 z^3을 만드는 세 가지 방법 중 하나를 빠뜨리는 것, 특히 $2 + a_1a_2$의 상수 2에서 나오는 항 $-2a_3$을 놓치는 것.
- (d)에서 음수인 a_k의 개수는 세었지만, 각각이 **두 개**의 근에 해당한다는 사실을 잊는 것.

STEP 너머

계수를 거꾸로 읽어도 같은 다항식을 **회문 다항식**(palindromic polynomial, 또는 자기역수 다항식(self-reciprocal polynomial))이라고 한다. 이러한 다항식의 근은 $w, 1/w$의 쌍으로 나타나며, 치환 $u = z + 1/z$를 하면 차수가 절반으로 줄어든다. 여기서 $a_k = w_k + 1/w_k$가 바로 그 u이다. 모든 근이 언제 단위원 위에 놓이는가 하는 질문은 슈어–콘 판정법(Schur–Cohn test) 같은 결과와 복소해석학(complex analysis)의 루셰 정리(Rouché's theorem)로 이어진다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 아이디어를 기하학적으로 살펴보기에 아주 훌륭한 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.