풀이

STEP II 2022, 문제 6

순수수학 • 직교 궤적

> **STEP II 2022, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

두 곡선이 한 점에서 직각으로 만나는 것은 그 점에서 두 곡선의 기울기(gradient)의 곱이 -1일 때이고, 그때뿐이다. 따라서 곡선족(family of curves) 전체에 대하여, 점 (x, y)를 지나는 곡선이 족의 어느 곡선이든 그 점에서 성립하는 기울기 공식을 얻고자 한다. 이는 곡선의 방정식과 그 도함수(derivative) 사이에서 매개변수(parameter) (a, b, c 또는 k)를 소거하여, x, y와 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$만으로 이루어진 미분방정식(differential equation)을 남긴다는 뜻이다. 그런 다음 기울기 m을 $-1/m$으로 바꾸어 풀면 수직으로 만나는 곡선족을 얻는다.

풀이

풀이 전체에서 $x > 0, y > 0$이다.

소문항 (i)(a)

$x^2 + y^2 = 2ax$를 x에 대하여 음함수 미분(implicit differentiation)하면

$$2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2a.$$

이 식에는 아직 곡선마다 달라지는 a가 남아 있다. 곡선의 방정식에서 $2a = (x^2 + y^2)/x$이므로, 이를 대입하고 양변에 x를 곱하면

$$2x^2 + 2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + y^2 \quad \Longrightarrow \quad 2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 - x^2,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

두 번째 곡선족에 대해서는 $x^2 + y^2 = 2by$를 미분하면 (우변도 y를 통해 x에 의존한다는 점

에 주의하면)

$$2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

이제 $2b = (x^2 + y^2)/y$이므로, 대입하고 양변에 y를 곱하면

$$2xy + 2y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (x^2 + y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \Longrightarrow \quad (x^2 - y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy.$$

소문항 (i)(b)

각 곡선족의 곡선 하나씩이 $y \neq x$인 점 (x, y)를 지난다고 하자. $x, y > 0$이므로 $2xy \neq 0$이고, $y \neq x$이며 둘 다 양수이므로 $x^2 - y^2 \neq 0$이다. 따라서 두 미분방정식에서 모두 나눗셈을 할 수 있고, 두 기울기는

$$m_1 = \frac{y^2 - x^2}{2xy}, \qquad m_2 = \frac{2xy}{x^2 - y^2}, \qquad \text{따라서} \qquad m_1 m_2 = \frac{y^2 - x^2}{x^2 - y^2} = -1.$$

두 기울기가 모두 유한하고 그 곱이 -1이므로 두 접선(tangent)은 수직이다.

생각해 보기 직선 $y = x$ 위에서는 무엇이 잘못되는가? 그렇다면 그곳에서는 결과가 성립하지 않는가?

$y = x$ 위에서 두 번째 방정식은 $0 \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x^2 \neq 0$이 되는데, 이를 만족하는 유한한 기울기는 없다. 즉 두 번째 곡선의 접선은 수직선이다. 이것은 대수적 계산이 무너지는 것이지 기하적 성질이 무너지는 것이 아니므로, 직접 살펴보자.

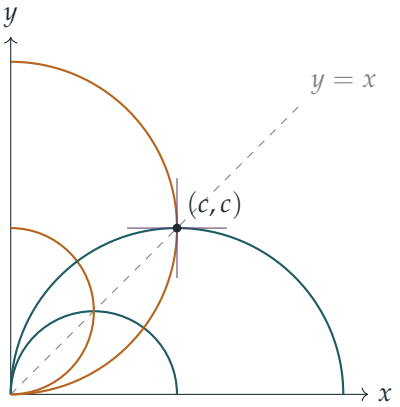
(c, c)가 $x^2 + y^2 = 2ax$ 위에 있으면 $2c^2 = 2ac$이므로 $a = c$이다. 마찬가지로 $b = c$이다. 첫 번째 곡선은 중심이 $(c, 0)$이고 반지름이 c인 원이며, (c, c)는 그 원의 가장 높은 점이므로 그 점에서의 접선은 수평선이다 (실제로 $y = x$일 때 $m_1 = 0$이다):

$$y = c.$$

두 번째 곡선은 중심이 $(0, c)$이고 반지름이 c인 원이며, (c, c)는 그 원의 가장 오른쪽 점이므로 접선은 수직선이다:

$$x = c.$$

수평선과 수직선은 서로 수직이므로, **그렇다**: 두 접선은 $y = x$ 위의 점을 포함하여 모든 교점에서 수직이다.



첫 번째 곡선족의 원(청록색)은 원점에서 y축에 접하고, 두 번째 곡선족의 원(호박색)은 원점에서 x축에 접한다.

소문항 (ii)

$y = c\ln x$에 대하여 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{c}{x}$이다. c를 소거하기 위해, 이러한 곡선 위의 제1사분면(first quadrant)의 점에서는 $y > 0$이므로 반드시 $\ln x \neq 0$임에 주목하자. 따라서 $c = y/\ln x$이고

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x\ln x}.$$

이 기울기는 결코 0이 아니므로, 같은 점을 지나며 수직으로 만나는 곡선의 기울기는 $-x\ln x/y$여야 한다. 따라서 두 번째 곡선족은

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -x\ln x.$$

를 만족한다. 변수분리(separation of variables)를 하고, $u = \ln x$, $\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x$로 두어 $x\ln x$를 부분적분(integration by parts)하면

$$\int y\,\mathrm{d}y = -\int x\ln x\,\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{1}{2}y^2 = -\tfrac{1}{2}x^2\ln x + \tfrac{1}{4}x^2 + C.$$

양변에 4를 곱하면 두 번째 곡선족은

$$2y^2 + 2x^2\ln x - x^2 = k,$$

이며, 각 상수 k마다 곡선이 하나씩 있다 ($x > 0, y > 0$인 부분만 고려한다). 거꾸로, 이 식을 음함수 미분하면 $4y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 4x\ln x + 2x - 2x = 0$이 되는데, 이는 정확히 위의 방정식이다. 따라서 이 곡선 중 하나가 어떤 $y = c\ln x$와 만나는 곳마다 기울기의 곱은 $\frac{y}{x\ln x}\cdot\frac{-x\ln x}{y} = -1$이다.

소문항 (iii)

$y^2 = 4k(x+k)$를 미분하면 $2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4k$이므로, $y > 0$이기 때문에

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2k}{y}.$$

> ? **생각해 보기** 여기에는 곡선족이 하나뿐이다. 그렇다면 "두 번째 곡선"은 어디에서 오는가?

제1사분면의 한 점 (x, y)를 고정하고, 곡선족의 어떤 곡선이 그 점을 지나는지 묻자. k의 값은

$$4k^2 + 4xk - y^2 = 0,$$

을 만족해야 하는데, 이는 k에 대한 이차방정식(quadratic equation)이다. 판별식(discriminant) $16x^2 + 16y^2$이 양수이므로 서로 다른 두 실근 k_1, k_2가 존재하고, 두 근의 곱은

$$k_1 k_2 = -\frac{y^2}{4}.$$

이다. (이 값은 음수이므로, 곡선족이 요구하는 대로 두 근 모두 0이 아니다.) 이차방정식의 근은 많아야 두 개이므로, 곡선족의 서로 다른 두 곡선이 (x, y)에서 만난다면 그 매개변수는 정확히 k_1과 k_2여야 한다. 그 점에서의 기울기는 $2k_1/y$와 $2k_2/y$이고, 그 곱은

$$\frac{4k_1k_2}{y^2} = \frac{4}{y^2} \cdot \left(-\frac{y^2}{4}\right) = -1.$$

따라서 이러한 모든 점에서 두 접선은 수직이며, 원하는 결과를 얻는다. (이 곡선들은 원점을 초점(focus)으로 하는 포물선(parabola)이며, 이 곡선족은 자기 자신의 직교 궤적이다.)

검산

- (i)에서 $(x, y) = (1, 2)$를 잡으면 $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{5}{4}$이고, 기울기는 $m_1 = \frac{3}{4}$와 $m_2 = -\frac{4}{3}$으로 그 곱은 -1이다.
- (ii)에서 $(e, 1)$에서 로그 곡선은 $c = 1$이고 기울기는 $1/e$이다. 두 번째 곡선족의 공식에 따르면 기울기는 $-e \cdot 1/1 = -e$이다. 역시 곱은 -1이다.
- (iii)에서 $(0, 2)$에서 이차방정식은 $4k^2 - 4 = 0$이므로 $k = \pm 1$이다. 즉 포물선 $y^2 = 4(x+1)$과 $y^2 = -4(x-1)$이며, 그 점에서의 기울기는 1과 -1이다.
- 네 결과 모두 곡선 자체의 수치 미분을 이용하여, 무작위로 고른 수천 개의 점에서 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- $2by$를 미분할 때 우변의 인수 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$를 빠뜨리는 것.
- (ii)에서 수직인 기울기를 $-x/c$로 쓰고 c가 남아 있는 채로 적분하는 것. c는 첫 번째 곡선에 속하는 값이므로, 풀기 전에 반드시 소거해야 한다.
- (i)(b)에서 $x^2 - y^2$가 왜 0이 아닌지 설명하지 않고 나누어서, 직선 $y = x$를 따로 다루어야 한다는 점을 놓치는 것.

STEP 너머

모든 곳에서 직각으로 만나는 곡선족을 **직교 궤적**(*orthogonal trajectories*)이라고 한다. 직교 궤적은 물리학에서 역선(field lines)과 등전위선(equipotentials)으로 나타나고, 복소해석(complex analysis)에서도 나타난다. 해석함수(analytic function)의 실수부와 허수부의 등위곡선(level curves)은 항상 서로 수직인데, 바로 이 때문에 (i)의 원들은 $1/z$에서, (iii)의 자기 직교 포물선들은 $\sqrt{z}$에서 생겨난다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 직교 궤적을 다루며, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석)는 복소해석의 관점을 아름답게 설명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.