풀이

STEP II 2022, 문제 5

순수수학 • 삼각형의 부등식

> **STEP II 2022, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

P에서 삼각형을 세 조각으로 나누어 보면, P가 어떻게 움직이든 가중합(weighted sum) $ax + by + cz$는 2Δ로 일정하다. 그러면 이후의 각 부분은 이 하나의 선형 제약 조건(linear constraint) 아래에서의 최적화(optimisation) 문제가 된다. 소문항 (i)은 $x + y + z$를 이 고정된 양과 비교하고, (iii)(a)의 항등식은 $x^2 + y^2 + z^2$에 대해 같은 일을 하며(이는 모습을 바꾼 코시-슈바르츠 부등식(Cauchy–Schwarz inequality)이다), 최댓값을 구할 때에는 a 대신 c를 써서 (i)을 반대 방향으로 이용한다.

풀이

소문항 (i)

$a > b$이고 $y \geq 0$이므로 $by \leq ay$이고, $a > c$이고 $z \geq 0$이므로 $cz \leq az$이다. 이 두 부등식을 더한 식의 양변에 ax를 더하면

$$ax + by + cz \leq ax + ay + az = a(x + y + z),$$

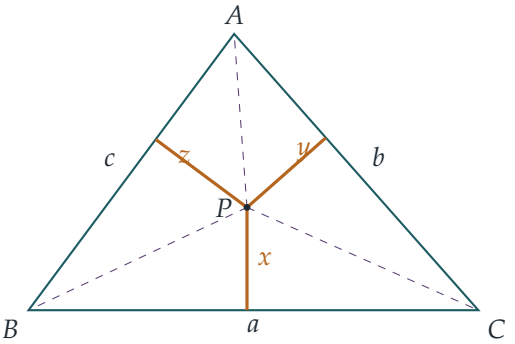
를 얻으므로 증명이 끝난다. $a - b > 0$이고 $a - c > 0$이므로 등호는 $(a - b)y + (a - c)z = 0$일 때, 즉 $y = z = 0$일 때에만 성립한다. 이 등호 조건은 뒤에서 필요하다.

소문항 (ii)(a)

P와 각 꼭짓점을 이으면 ABC는 삼각형 PBC, PCA, PAB로 나뉜다(P가 변 위에 있으면 일부는 퇴화(degenerate)한 삼각형일 수 있다). 삼각형 PBC는 밑변이 $BC = a$, 높이가 x이고,

나머지도 마찬가지이므로

$$\Delta = \tfrac{1}{2}ax + \tfrac{1}{2}by + \tfrac{1}{2}cz, \qquad \text{즉,} \qquad ax + by + cz = 2\Delta.$$



거꾸로, $ax + by + cz = 2\Delta$를 만족하는 임의의 $x, y, z \geq 0$은 삼각형 내부(또는 변 위)의 오직 한 점 P에서의 거리가 된다. 세 삼각형의 넓이 $\frac{1}{2}ax$, $\frac{1}{2}by$, $\frac{1}{2}cz$는 음이 아니고 합이 Δ이며, 이 넓이들이 P를 결정하기 때문이다(이들은 P의 넓이 좌표(areal coordinates)이다). 따라서 이후에는 문제를 순수하게 대수적인 문제로 다룰 수 있다. 즉, $ax + by + cz = 2\Delta$를 만족하는 음이 아닌 모든 x, y, z에 대해 최적화하면 된다.

소문항 (ii)(b)

소문항 (i)과 (ii)(a)에 의해

$$x + y + z \geq \frac{ax + by + cz}{a} = \frac{2\Delta}{a}.$$

등호는 $y = z = 0$일 때에만 성립하고, 이때 $ax = 2\Delta$이다. 따라서 합의 최솟값은

$$x + y + z = \frac{2\Delta}{a}, \qquad \text{최솟값을 갖는 경우:} \quad x = \frac{2\Delta}{a},\ y = 0,\ z = 0.$$

기하학적으로 보면, $y = z = 0$이면 P는 CA와 AB 위에 동시에 있으므로 $P = A$이고, x는 A에서 가장 긴 변 BC에 내린 높이(altitude)이다.

소문항 (iii)(a)

세 차의 제곱을 전개하면

$$(bx - ay)^2 + (cy - bz)^2 + (az - cx)^2 = b^2x^2 + a^2y^2 + c^2y^2 + b^2z^2 + a^2z^2 + c^2x^2 \\ - 2(abxy + bcyz + cazx),$$

이고, 한편

$$(ax + by + cz)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2(abxy + bcyz + cazx).$$

두 식을 더하면 교차항은 소거되고, a^2, b^2, c^2 중 하나와 x^2, y^2, z^2 중 하나의 곱이 모두 정확히 한 번씩 나타나므로 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$를 얻는다. 이로써 모든 실수에 대해 항등식이 증명된다.

소문항 (iii)(b)

항등식에 $ax+by+cz=2\Delta$를 대입하면

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = (bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2+4\Delta^2 \geq 4\Delta^2,$$

이다. 제곱은 음이 아니기 때문이다. 따라서

$$x^2+y^2+z^2 \geq \frac{4\Delta^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

> **생각해 보기** 하한(lower bound)은 실제로 도달될 때에만 최솟값이 된다. 세 제곱이 모두 0이 되는 실제 점 P가 존재하는가?

등호가 성립하려면 $bx=ay, cy=bz, az=cx$이어야 한다. 이는 (x,y,z)가 (a,b,c)의 상수배라는 뜻이다. $x=\lambda a$라 하면 $y=\frac{b}{a}x=\lambda b, z=\frac{c}{a}x=\lambda c$이고, 세 식이 모두 성립한다. 제약 조건에서 $\lambda(a^2+b^2+c^2)=2\Delta$이므로 $\lambda=\dfrac{2\Delta}{a^2+b^2+c^2}>0$이다. 그러면 x,y,z는 모두 양수이고 $ax+by+cz=2\Delta$를 만족하므로, (ii)(a)의 설명에 의해 이들은 실제 점 P(삼각형의 진짜 내부에 있는 점)에 대응한다. 따라서 제곱의 합의 최솟값은

$$\frac{4\Delta^2}{a^2+b^2+c^2}, \qquad \text{최솟값을 갖는 경우:} \quad x=\frac{2a\Delta}{a^2+b^2+c^2}, y=\frac{2b\Delta}{a^2+b^2+c^2}, z=\frac{2c\Delta}{a^2+b^2+c^2}.$$

소문항 (iv)

> **생각해 보기** 소문항 (i)에서는 a가 가장 긴 변이라는 사실을 이용했다. 대신 가장 짧은 변 c를 이용하면 어떻게 될까?

$a>c, b>c$이고 $x,y\geq 0$이므로, 소문항 (i)의 논증을 반대로 적용하면 $ax+by+cz \geq c(x+y+z)$이고, 등호는 $x=y=0$일 때에만 성립한다. 따라서

$$x+y+z \leq \frac{2\Delta}{c}.$$

또한 $x,y,z\geq 0$이므로

$$x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx) \leq (x+y+z)^2,$$

이고, 등호는 $xy+yz+zx=0$일 때에만 성립한다. 이 둘을 합치면(양변이 모두 음이 아니므로 제곱해도 괜찮다)

$$x^2+y^2+z^2 \leq (x+y+z)^2 \leq \frac{4\Delta^2}{c^2}.$$

$x = y = 0$이면 두 부등식 모두 등호가 성립한다. 이때 $xy + yz + zx = 0$이고 $cz = 2\Delta$이기 때문이다. 따라서 제곱의 합의 최댓값은

$$\frac{4\Delta^2}{c^2}, \qquad \text{최댓값을 갖는 경우:} \quad x = 0,\ y = 0,\ z = \frac{2\Delta}{c},$$

이고, 이는 가장 짧은 변의 맞은편 꼭짓점인 $P = C$이다. (두 번째 부등식은 $x = y = 0$일 때에만 등호가 성립하므로, 최댓값을 갖는 점은 이 점뿐이다.)

검산

세 변이 $a = 7$, $b = 6$, $c = 5$인 예각삼각형(acute triangle)을 생각하자. 헤론의 공식(Heron's formula)에 의해 $\Delta = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 6\sqrt{6} \approx 14.70$이다. 그러면 답은 다음과 같다. $x + y + z$의 최솟값은 $12\sqrt{6}/7 \approx 4.20$, $x^2 + y^2 + z^2$의 최솟값은 $864/110 = 432/55 \approx 7.85$, 최댓값은 $864/25 = 34.56$이다. 크기 순서도 타당하다. $P = C$에서 제곱의 합은 C에서 내린 높이의 제곱 $(12\sqrt{6}/5)^2 = 34.56$일 뿐이다. 무작위로 만든 여러 예각삼각형 각각에서 수천 개의 무작위 점 P를 잡아 컴퓨터로 확인한 결과, $ax + by + cz = 2\Delta$와 세 경계가 모두 성립했고, 극값은 A, 거리가 (a, b, c)에 비례하는 점, 그리고 C에서 나타났다.

흔한 실수

- 하한이 실제로 도달됨을 보이지 않고 하한만 제시하는 것. (iii)(b)에서는 등호가 성립하는 점의 거리가 음이 아니고 제약 조건을 만족하여 실제 점 P가 됨을 반드시 확인해야 한다.
- 꼭짓점을 혼동하는 것. $x + y + z$의 최솟값은 A(가장 긴 변의 맞은편)에서 나타나지만, $x^2 + y^2 + z^2$의 최댓값은 C(가장 짧은 변의 맞은편)에서 나타난다.
- (iv)에서 조건 $x, y, z \geq 0$을 빠뜨리는 것. 이 조건이 없으면 $x^2 + y^2 + z^2 \leq (x + y + z)^2$는 성립하지 않는다.

STEP 너머

(iii)(a)의 항등식은 라그랑주 항등식(Lagrange's identity)이며, 3차원에서의 코시-슈바르츠 부등식 $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \leq |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2$을 증명해 준다. 최솟값을 갖는 점은 (x, y, z)가 (a, b, c)에 평행한 점으로, 원점에서 평면 $ax + by + cz = 2\Delta$에 내린 수선의 발이다. $x^2 + y^2 + z^2$과 같은 볼록 함수(convex function)의 삼각형 위에서의 최댓값은 항상 꼭짓점에서 나타나는데, 이는 선형 최적화와 볼록 최적화를 처음으로 엿보는 것이다. (iii)(b)에서 찾은 점은 삼각형의 대칭중선점(symmedian point, 또는 르무안(Lemoine) 점)이다. 내적(dot product)과 사영(projection)에 대해 더 알고 싶다면 Strang, *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입

문서)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.