풀이

STEP II 2022, 문제 4

순수수학 • 절댓값 함수

> **STEP II 2022, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

절댓값(modulus) 기호는 그 안의 식의 부호가 바뀌는 점에서만 의미가 있다. 따라서 그러한 점들 사이의 각 구간에서는 모든 절댓값을 그 안의 식에 플러스나 마이너스를 붙인 것으로 바꿔 쓸 수 있다. 반대로, 항 $A|x-p|$는 $x=p$에서 꺾인 점(corner)을 만들고, 그 점에서 기울기(gradient)가 $2A$만큼 뛴다. 그러므로 하나의 식을 만들려면 기울기의 도약(그리고 마지막 소문항에서는 x^2 계수의 도약)을 맞춘 다음 상수를 정하면 된다.

풀이

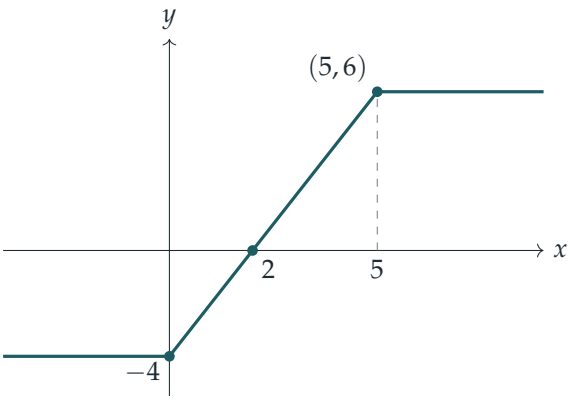
소문항 (i)

임계점은 $x=0$($|x|$의 부호가 바뀌는 곳)과 $x=5$($|x-5|$의 부호가 바뀌는 곳)이다.

- $x \le 0$일 때: $|x| = -x$이고, $x-5<0$이므로 $|x-5| = 5-x$이다. 따라서 $\mathrm{f}(x) = -x-(5-x)+1 = -4$이다.
- $0 \le x \le 5$일 때: $|x| = x$이고 $|x-5| = 5-x$이다. 따라서 $\mathrm{f}(x) = x-(5-x)+1 = 2x-4$이다.
- $x \ge 5$일 때: $|x| = x$이고 $|x-5| = x-5$이다. 따라서 $\mathrm{f}(x) = x-(x-5)+1 = 6$이다.

$x=0$과 $x=5$에서는 관련된 두 식이 모두 성립한다(각 절댓값 안의 식이 그 점에서 0이거나 부호가 정해져 있다). 따라서 겹치는 끝점에서 값이 일치한다: $-4 = 2(0)-4$이고 $2(5)-4=6$이다. 이것이 구하는 구간별(piecewise) 표현이다.

그래프는 높이 -4에서 수평이다가, $(0,-4)$에서 $(2,0)$을 지나 $(5,6)$까지 기울기 2로 올라가고, 그 뒤로는 높이 6에서 수평이다.



소문항 (ii)

소문항 (i)을 보면 다음과 같은 꼴을 시도해 볼 만하다.

$$g(x) = A|x| + B|x-5| + Cx + D.$$

왼쪽에서 오른쪽으로 $x = 0$을 지나면 항 $A|x|$는 $-Ax$에서 Ax로 바뀌므로 기울기가 $2A$만큼 뛴다. 마찬가지로 $B|x-5|$는 $x = 5$에서 기울기를 $2B$만큼 뛰게 한다. 주어진 g는 세 조각에서 기울기가 각각 $-1, 3, 1$이므로

$$2A = 3 - (-1) = 4, \qquad 2B = 1 - 3 = -2,$$

이고, $A = 2$, $B = -1$을 얻는다. $x \geq 5$에서 이 식은 $2x - (x-5) + Cx + D = (1+C)x + 5 + D$이고, 이것이 $x + 10$이어야 하므로 $C = 0$, $D = 5$이다. 따라서

$$\boxed{g(x) = 2|x| - |x-5| + 5.}$$

나머지 두 조각을 확인하면, $x \leq 0$일 때 $-2x - (5-x) + 5 = -x$이고, $0 \leq x \leq 5$일 때 $2x - (5-x) + 5 = 3x$이다. 둘 다 g의 정의와 일치한다.

? **생각해 보기** 이런 꼴의 식이 애초에 통할 가능성이 있었던 이유는 무엇일까?

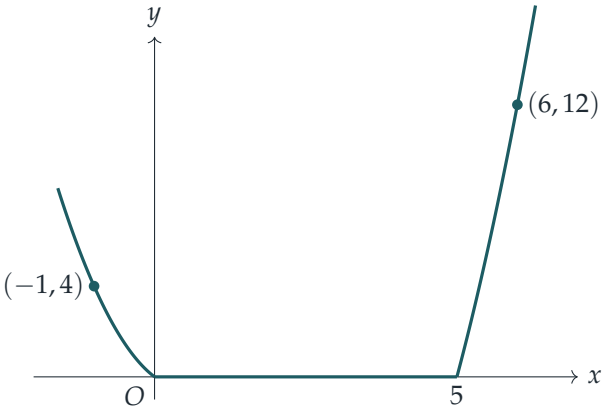
g의 각 조각은 일차식이고, 조각들은 연속적으로(continuously) 이어진다($x = 0$에서는 양쪽 모두 0, $x = 5$에서는 양쪽 모두 15). 일차식의 절댓값들의 합에 일차함수를 더한 것은 언제나 연속이고 구간별로 일차이며, 꺾인 점은 절댓값의 부호가 바뀌는 곳에만 생긴다. 만약 g에 끊어진 곳이 있었다면 그런 식으로는 결코 만들어 낼 수 없었을 것이다.

소문항 (iii)

이번에는 부호가 바뀌는 점이 $x = 0$($|x|$에 대해)과 $x(x-5)$의 근인데, 이 근도 역시 0과 5이다. 곱 $x(x-5)$는 $x < 0$과 $x > 5$에서 양수이고 그 사이에서 음수이다.

- $x \le 0$일 때: $\mathrm{h}(x) = x^2 - x + 4x + (x^2 - 5x) = 2x^2 - 2x = 2x(x-1)$.
- $0 \le x \le 5$일 때: $\mathrm{h}(x) = x^2 - x - 4x - (x^2 - 5x) = 0$.
- $x \ge 5$일 때: $\mathrm{h}(x) = x^2 - x - 4x + (x^2 - 5x) = 2x^2 - 10x = 2x(x-5)$.

따라서 h는 $[0,5]$에서 항상 o이다. 왼쪽에서는 포물선(parabola) $y = 2x(x-1)$의 일부이다. 원점에서 기울기 $4x - 2 = -2$로 만나고, $x \to -\infty$일 때 한없이 커진다(예를 들어 $\mathrm{h}(-1) = 4$). 오른쪽에서는 $y = 2x(x-5)$의 일부이다. $(5,0)$에서 기울기 $4x - 10 = 10$으로 출발한다(예를 들어 $\mathrm{h}(6) = 12$). 두 갈래는 서로 거울상이 아니다. 오른쪽 갈래가 다섯 배 가파르게 축을 떠난다. 그래프는 연속이고 $(0,0)$과 $(5,0)$에서 꺾이며, 모든 곳에서 $\mathrm{h}(x) \ge 0$이다.



소문항 (iv)

소문항 (iii)이 필요한 도구를 보여 준다. $|x(x-5)|$는 $[0,5]$ 밖에서는 $x^2 - 5x$이고 안에서는 $-(x^2 - 5x)$이므로, x^2 항을 켰다 껐다 할 수 있다. 함수 k의 x^2 계수는 $[0,5]$ 밖에서 0이고 안에서 2이다. $ax^2 + d|x(x-5)|$에서 x^2의 계수는 밖에서 $a+d$, 안에서 $a-d$이므로 $a+d=0$, $a-d=2$, 즉 $a=1$, $d=-1$이어야 한다. 따라서 $x^2 - |x(x-5)|$는 올바른 이차 항의 거동을 가지며,

$$x^2 - |x(x-5)| = \begin{cases} 5x & x \le 0 \text{ 또는} x \ge 5, \\ 2x^2 - 5x & 0 \le x \le 5. \end{cases}$$

이것을 k에서 빼면 구간별 일차인 나머지가 남는다.

$$\mathrm{k}(x) - \left(x^2 - |x(x-5)|\right) = \begin{cases} 5x & x \le 5, \\ 50 - 5x & x \ge 5. \end{cases}$$

이것은 $x = 5$에서만 꺾이고, 그 점에서 기울기가 5에서 -5로, 즉 -10만큼 뛴다. 따라서 이것은 $-5|x-5| + (\text{일차식})$ 꼴이다. $x \le 5$에서 $-5|x-5| = 5x - 25$이므로, 25를 더하면

$5x$가 된다. 이로부터 다음 식을 추측할 수 있다.

$$\boxed{\mathrm{k}(x) = x^2 - |x(x-5)| - 5|x-5| + 25.}$$

확인. 각 구간에 대입해 보자.

- $x \le 0$일 때: $x(x-5) \ge 0$이고 $x-5 < 0$이므로, 식은 $x^2 - (x^2-5x) - 5(5-x) + 25 = 5x + 5x = 10x$가 된다.
- $0 \le x \le 5$일 때: $x(x-5) \le 0$이고 $x-5 \le 0$이므로, 식은 $x^2 + (x^2-5x) - 5(5-x) + 25 = 2x^2$이 된다.
- $x \ge 5$일 때: $x(x-5) \ge 0$이고 $x-5 \ge 0$이므로, 식은 $x^2 - (x^2-5x) - 5(x-5) + 25 = 50$이 된다.

이것은 정확히 k의 세 조각이므로, 이 식은 모든 실수 x에 대해 옳다.

하나의 식으로 나타내는 방법은 유일하지 않다. 예를 들어 $|x(x-5)| = |x|\,|x-5|$이므로 답을 다르게 쓸 수 있고, 다른 조합($x|x|$를 쓰는 것 등)도 통한다. 위의 세 구간 확인을 통과한다면 어떤 답이든 괜찮다.

검산

- 특정한 값 대입: $\mathrm{g}(-2) = 2$는 정의로부터도, $2(2) - 7 + 5$로부터도 나온다. $\mathrm{g}(7) = 17 = 14 - 2 + 5$이다. k의 경우: $\mathrm{k}(3) = 18$이고 $9 - |-6| - 10 + 25 = 18$이다. $\mathrm{k}(-1) = -10$이고 $1 - 6 - 30 + 25 = -10$이다.
- 연속성은 간단한 점검 수단이다. 절댓값으로 만든 하나의 식은 모두 연속이며, 실제로 g와 k는 이음매에서 값이 일치한다($\mathrm{k}(5) = 50 = 2 \cdot 5^2$).
- 네 식 모두 $[-20, 25]$의 임의의 10^5개 점에서 컴퓨터로 구간별 표현과 비교하였고, 반올림 오차 범위 안에서 일치하였다.

흔한 실수

- h의 두 갈래를 대칭으로 그리는 것. 왼쪽 갈래는 $2x(x-1)$, 오른쪽 갈래는 $2x(x-5)$이며, 꺾인 점에서의 기울기는 각각 -2와 10이다.
- $|x(x-5)|$가 **두** 점에서 부호가 바뀐다는 것을 잊는 것. 그래서 (iii)에서는 0에서만이 아니라 가운데 구간 전체에서 부호가 뒤집힌다.
- 세 구간 모두에 대입해 보지 않고 k의 식을 적어 내는 것. 확인 과정은 반드시 필요하다.

STEP 너머

여기서 한 기울기 도약의 장부 정리는 일반적인 사실의 맛보기이다. $\mathbb{R}$에서 정의되고 꺾인 점이 유한 개인 연속인 구간별 일차함수는 모두 일차함수에 $|x-p|$ 꼴 항들의 결합을 더한 것이다. $\max(x,0) = \frac{1}{2}(x+|x|)$이므로, 이것은 수치해석(numerical analysis)의 일차 스플라인(linear spline)과 신경망(neural network)의 "ReLU" 단위의 바탕이 되는 아이디어이다. 연속성과 구간별로 정의된 함수에 대한 엄밀한 설명은 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.