풀이

STEP II 2022, 문제 3

순수수학 • 피보나치 급수와 소수 표현

> **STEP II 2022, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

점화식(recurrence) $F_{r+1} - F_r - F_{r-1} = 0$이 모든 것을 움직이는 엔진이다. 이 식에 $\frac{1}{10}$의 거듭제곱을 곱해 더하고 첨자를 다시 매기면, 각 부분이 S_n의 상수배와 몇 개의 경계항(boundary term)으로 바뀐다. 이것이 바로 생성함수(generating function) 기법이다. 소문항 (i)은 안전장치 역할을 한다. 피보나치 수(Fibonacci numbers)가 2의 거듭제곱보다 빠르게 커지지 않는다는 것을 말해 주므로, 10(또는 100)의 거듭제곱으로 나누면 꼬리(tail)가 매우 작아지고 쉽게 위로 유계임을 보일 수 있다.

풀이

소문항 (i)

먼저 모든 $F_k \geq 0$이다($F_0, F_1 \geq 0$이고 음이 아닌 수들의 합은 음이 아니므로 수학적 귀납법(induction)으로 보일 수 있다). 다음으로 이 수열은 결코 감소하지 않는다. $F_1 \geq F_0$이고, $k \geq 1$이면 $F_{k+1} - F_k = F_{k-1} \geq 0$이기 때문이다.

따라서 모든 $k \geq 1$에 대하여

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} \leq F_k + F_k = 2F_k.$$

이제 $n \geq 1$을 고정하고 $r \geq n$에 대한 귀납법을 쓴다. $r = n$일 때 주장은 $F_n \leq F_n$이 된다. 어떤 $r \geq n$에 대하여 $F_r \leq 2^{r-n}F_n$이면, $r \geq 1$이므로

$$F_{r+1} \leq 2F_r \leq 2 \cdot 2^{r-n}F_n = 2^{(r+1)-n}F_n.$$

이로써 귀납법이 완성되므로, $n \geq 1$이고 $r \geq n$일 때마다 $F_r \leq 2^{r-n}F_n$이다.

소문항 (ii)

좌변의 세 합을 각각 S_n으로 나타낸다.

첫째 합. $k = r+1$로 놓으면

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{F_{r+1}}{10^{r-1}} = 100 \sum_{k=2}^{n+1} \frac{F_k}{10^k} = 100\left(S_n - \frac{F_1}{10} + \frac{F_{n+1}}{10^{n+1}}\right)$$
$$= 100S_n - 10F_1 + \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}}.$$

둘째 합. 이것은 그냥 $10S_n$이다.

셋째 합. $k = r-1$로 놓으면

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{F_{r-1}}{10^{r-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F_k}{10^k} = F_0 + S_n - \frac{F_n}{10^n}.$$

첫째 합에서 둘째 합과 셋째 합을 빼면

$$(100 - 10 - 1)S_n - 10F_1 - F_0 + \frac{F_n}{10^n} + \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}} = 89S_n - 10F_1 - F_0 + \frac{F_n}{10^n} + \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (iii)

(ii)의 좌변에 있는 세 합을 하나로 합친다. 그 r번째 항은 $(F_{r+1} - F_r - F_{r-1})/10^{r-1} = 0$이므로 좌변은 0이다. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$을 대입하면

$$89S_n = 10 - \frac{F_n}{10^n} - \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}}. \qquad (*)$$

? **생각해 보기** $n \to \infty$일 때 남은 두 항이 사라진다는 것을 어떻게 알 수 있을까?

바로 여기서 소문항 (i)이 제 몫을 한다. 거기서 $n = 1$로 놓으면 모든 $r \geq 1$에 대하여 $F_r \leq 2^{r-1}$이므로

$$0 \leq \frac{F_n}{10^n} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n, \qquad 0 \leq \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}} \leq \frac{2^n}{10^{n-1}} = 10\left(\frac{1}{5}\right)^n,$$

이고, 두 상계 모두 0으로 수렴한다. $(*)$에서 $n \to \infty$로 보내면 $89S_n \to 10$, 즉

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{F_r}{10^r} = \frac{10}{89}.$$

꼬리에 대해서는 $n = 7$로 소문항 (i)을 적용한다($F_7 = 13$임에 주의한다). $r \geq 7$이면 $F_r \leq 2^{r-7} \cdot 13$이므로

$$\sum_{r=7}^{\infty} \frac{F_r}{10^r} \leq \frac{13}{10^7} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{10^j} = \frac{13}{10^7} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{65}{4} \times 10^{-7} = 1.625 \times 10^{-6} < 2 \times 10^{-6}.$$

$\frac{1}{89}$의 자릿수. 처음 여섯 항의 합은

$$S_6 = 0.1 + 0.01 + 0.002 + 0.0003 + 0.00005 + 0.000008 = 0.112358.$$

꼬리 $T = \frac{10}{89} - S_6$은 (각 항이 양수이므로) 엄밀히 양수이고 2×10^{-6}보다 작으므로

$$0.112358 < \frac{10}{89} < 0.112360, \qquad \text{따라서} \qquad 0.0112358 < \frac{1}{89} < 0.0112360.$$

이 두 경계 사이에 엄밀히 놓인 모든 수는 $0.011235\ldots$로 시작하므로, $\frac{1}{89}$의 소수점 아래 처음 여섯 자리는 $0, 1, 1, 2, 3, 5$이다. 엄밀한 하계가 중요하다. 이것이 전개가 $0.0112357\ldots$일 가능성을 배제해 주기 때문이다.

소문항 (iv)

목표하는 수를 앞의 00 다음부터 두 자리씩 끊어 읽는다.

$$0.00\ 01\ 01\ 02\ 03\ 05\ 08\ 13\ 21\ 34\ 55\ldots$$

이 두 자리 묶음들은 $F_1, F_2, \ldots, F_{10}$을 각각 두 자리로 쓴 것이다. 따라서 이 수는 $\frac{1}{100}U$여야 한다. 여기서

$$U = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{F_r}{100^r}.$$

U의 합 구하기. 소문항 (i)에 의해 $F_r \le 2^{r-1}$이므로 이 급수는 절대수렴(absolutely convergent)한다. 그러므로 (ii)에서와 마찬가지로 수렴하는 급수들을 항별로 밀고 합칠 수 있다.

$$U - \frac{U}{100} - \frac{U}{100^2} = \frac{F_1}{100} + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{F_r - F_{r-1} - F_{r-2}}{100^r} = \frac{1}{100}.$$

여기서 $r = 1$인 항은 ($F_0 = 0$이므로) $F_1/100$이고, 그 뒤의 괄호는 모두 0이다. 따라서 $U \cdot \frac{9899}{10000} = \frac{1}{100}$이고, $U = \frac{100}{9899}$이다. 그러므로 후보는

$$\frac{U}{100} = \frac{1}{9899},$$

이며, $r = 1, s = 9899$로 둘 다 10000보다 작은 양의 정수이다.

자릿수 확인. 처음 열 항의 합을 U_{10}이라 하자. $F_1, \ldots, F_{10}$이 각각 100보다 작으므로 항들이 서로 겹치지 않고,

$$U_{10} = 0.01010203050813213455$$

가 소수점 아래 20자리로 정확히 성립한다. $n = 11$로 소문항 (i)을 적용하면($F_{11} = 89$), 나머지 항들은

$$0 < U - U_{10} \le \frac{89}{100^{11}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{100}\right)^j = \frac{89}{10^{22}} \cdot \frac{100}{98} < 10^{-20}.$$

을 만족한다. 따라서 $U_{10} < U < U_{10} + 10^{-20}$이고, U의 소수점 아래 처음 20자리는 U_{10}의 것과 같다. 100으로 나누면 이 자릿수들이 오른쪽으로 두 자리 밀린다.

$$\frac{1}{9899} = 0.00010102030508132134 55\ldots,$$

이것이 바로 요구된 시작 부분이다.

검산

- 직접 나눗셈을 하면 $1/89 = 0.011235955\ldots$이다. 자릿수 011235가 일치하고, 그다음 자릿수 9, 5, 5는 피보나치 항들이 두 자리에 이르면서 서로 "받아올림"되는 모습을 보여 준다.
- (iii)에서 $r = 6$ 이후의 꼬리는 실제로 $10/89 - 0.112358 \approx 1.55 \times 10^{-6}$으로, 우리가 구한 상계 1.625×10^{-6}보다 넉넉히 작다.
- 컴퓨터로 $1/9899$를 소수점 아래 22자리까지 계산하면 0.0001010203050813213455이다. 그다음 묶음은 $F_{11} = 89$가 아니라 90인데, $F_{12} = 144$가 두 자리 칸을 넘쳐 앞 칸으로 1을 받아올리기 때문이다.

흔한 실수

- (ii)에서 첨자를 다시 매길 때 경계항을 잘못 구하는 것. 밀린 각 합의 첫 항과 마지막 항을 직접 써 보면 이를 피할 수 있다.
- (iii)에서 $F_n/10^n$과 $F_{n+1}/10^{n-1}$이 0으로 수렴함을 보이지 않는 것. 소문항 (i)은 정확히 이것을 위해 있다.
- 꼬리가 **엄밀히** 양수라는 사실을 잊는 것. 상계만으로는 여섯째 자리가 결정되지 않는다.

STEP 너머

함수 $G(x) = \sum F_r x^r$는 피보나치 수의 **생성함수**이며, 위의 밀기 논법은 $|x| < \frac{1}{2}$일 때 $G(x) = x/(1 - x - x^2)$임을 보여 준다. $x = \frac{1}{10}$과 $x = \frac{1}{100}$을 대입하면 $\frac{10}{89}$와 $\frac{100}{9899}$를 얻는다. 생성함수는 점화식을 대수로 바꾸어 주며 조합론(combinatorics)의 핵심 도구이다. Herbert Wilf의 *generatingfunctionology*는 생생한 입문서이다. "수렴하는 급수의 재배열"을 엄밀하게 다루는 것은 대학 1학년 해석학(analysis)의 주제이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.