풀이

STEP II 2022, 문제 2

순수수학 • 점화식

> **STEP II 2022, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

관계식의 양변에 2를 곱하면 이것은 **이계차분**(*second difference*) $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$에 관한 식이 된다. (i)에서는 이 값이 0이므로 일계차분(first difference)이 일정하고, 따라서 수열은 일차식이다. (ii)와 (iii)에서는 이계차분이 주어진 상수이거나 n에 대한 주어진 일차함수이므로, 정확히 그 이계차분을 갖는 다항식(polynomial)을 빼서 (i)과 같은 유형의 수열만 남기는 것이 요령이다.

풀이

소문항 (i)

관계식의 양변을 두 배 하고 정리하면 모든 $n \geq 1$에 대하여

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n.$$

이 성립한다. 따라서 각 차분은 바로 앞의 차분과 같고, 귀납법(induction)에 의하여 모든 차분은 첫 번째 차분 $d = u_2 - u_1$과 같다. 이것이 이웃한 항 사이의 일정한 차이이다.

이 차분 $n-1$개를 모두 더하면

$$u_n = u_1 + (n-1)d = dn + (u_1 - d),$$

이고, 이는 $d \neq 0$이면 n에 대한 1차 다항식, $d = 0$이면 0차 다항식(상수)이다. 어느 경우든 차수(degree)는 1 이하이다.

소문항 (ii)

$v_n = t_n + pn^2$으로 놓자.

$$\tfrac{1}{2}(p(n+2)^2 + pn^2) = p(n^2+2n+2) = p(n+1)^2 + p,$$

이므로 v_n에 대한 관계식은

$$t_{n+1} + p(n+1)^2 = \tfrac{1}{2}(t_{n+2} + t_n) + p(n+1)^2 + p - p,$$

가 되고, 곧 모든 $n \geq 1$에 대하여 $t_{n+1} = \frac{1}{2}(t_{n+2} + t_n)$이다. 소문항 (i)에 의하여 어떤 상수 A, B에 대하여 $t_n = A + Bn$이므로

$$v_n = pn^2 + Bn + A.$$

이다. $p \neq 0$이므로 n^2항이 남고, v_n의 차수는 정확히 2이다.

$v_1 = v_2 = 0$이므로

$$p + B + A = 0, \qquad 4p + 2B + A = 0.$$

두 식을 빼면 $3p + B = 0$이므로 $B = -3p$이고, 따라서 $A = 2p$이다. 그러므로

$$v_n = p(n^2 - 3n + 2) = p(n-1)(n-2).$$

이다.

소문항 (iii)

이번에는 치환이 주어지지 않으므로 직접 찾아야 한다. 관계식의 양변을 두 배 하면

$$w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = 2(an + b).$$

이다.

? **생각해 보기** n에 대한 어떤 다항식의 이계차분이 n에 대한 일차식이 되는가?

차분을 한 번 취할 때마다 다항식의 차수가 하나씩 낮아지므로 삼차식이 필요하다. $\Delta^2 f(n) = f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)$이라 쓰자. 직접 전개하면

$$\Delta^2 n^3 = (n^3 + 6n^2 + 12n + 8) - 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + n^3 = 6n + 6,$$
$$\Delta^2 n^2 = (n^2 + 4n + 4) - 2(n^2 + 2n + 1) + n^2 = 2.$$

이다. 따라서 $\Delta^2(cn^3 + en^2) = 6cn + 6c + 2e$이고, 이것이 모든 n에 대하여 $2an + 2b$와 같으려면

$$c = \frac{a}{3}, \qquad e = b - 3c = b - a.$$

이어야 한다. 이제 $w_n = t_n + \frac{a}{3}n^3 + (b-a)n^2$으로 놓자. Δ^2은 선형(linear)이므로 $\Delta^2 w_n = \Delta^2 t_n + 2(an+b)$이고, 관계식은 $\Delta^2 t_n = 0$이 되는데, 이는 정확히 소문항 (i)의 관계식이다. 따라서 $t_n = A + Bn$이고

$$w_n = \frac{a}{3}n^3 + (b-a)n^2 + Bn + A.$$

이다. $a \neq 0$이므로 삼차항이 존재하고, w_n의 차수는 3이다.

$w_1 = w_2 = 0$이므로

$$\frac{a}{3} + (b-a) + B + A = 0,$$
$$\frac{8a}{3} + 4(b-a) + 2B + A = 0.$$

두 번째 식에서 첫 번째 식을 빼면 $\frac{7a}{3} + 3(b-a) + B = 0$이므로 $B = \frac{2a}{3} - 3b$이고, 이를 첫 번째 식에 대입하면 $A = 2b$이다. 그러므로

$$w_n = \frac{a}{3}n^3 + (b-a)n^2 + \left(\frac{2a}{3} - 3b\right)n + 2b.$$

이다. $w_1 = w_2 = 0$이므로 인수 $n-1$과 $n-2$가 나타나야 하고, n^3항과 상수항을 비교하면 더 깔끔한 꼴

$$w_n = \frac{(n-1)(n-2)(an+3b)}{3}.$$

을 얻는다. ($(n-1)(n-2)(an+3b)$를 전개하면 $an^3 + (3b-3a)n^2 + (2a-9b)n + 6b$이므로 일치한다.)

검산

- (iii)에서 $a = 0, b = p$로 놓으면 (ii)가 다시 나와야 하는데, 실제로 그렇다: $(n-1)(n-2)\cdot 3p/3 = p(n-1)(n-2)$.
- 점화식(recurrence relation)을 직접 계산해 보자. $a = 3, b = 0$이면 $w_{n+2} = 2w_{n+1} - w_n + 6n$이므로 $w_1 = w_2 = 0$에서 $w_3 = 6$, $w_4 = 24$, $w_5 = 60$을 얻는다. 공식은 $(n-1)(n-2)n$을 주며, 그 값은 $6, 24, 60$이다.
- 차수가 3인 수열은 삼계차분이 일정하다. $0, 0, 6, 24, 60$의 차분은 $0, 6, 18, 36$, 그다음은 $6, 12, 18$, 그다음은 $6, 6$으로 일정하며, 그 값은 $2a$와 같다.

흔한 실수

- (i)의 수열의 차수가 정확히 1이라고 말하는 것: $u_1 = u_2$이면 수열은 상수이다.
- (iii)에서 $w_n = t_n + kn^3$만 시도하는 것. n^3항만으로는 $6kn + 6k$가 나오므로, 상수항을 맞추려면 n^2항도 필요하다.
- "차수가 정확히 2"(또는 3)임을 $p \neq 0$(또는 $a \neq 0$)으로부터 정당화하는 것을 잊는 것.

STEP 너머

이것은 $y'' = f(x)$를 푸는 문제의 이산(discrete) 버전이다. 일반해는 특수해(particular solution)에 동차방정식(homogeneous equation)의 해를 더한 것이며, 여기서 동차방정식의 해는 일차 수열 $A + Bn$이다. 같은 "여함수(complementary function) 더하기 특수해" 구조가 선형 미분방정식(differential equation)을 지배하며, 다항식 꼴의 특수해를 추측하는 방법도 거의 그대로 옮겨 갈 수 있다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 연속 버전을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.