풀이

STEP II 2022, 문제 11

확률과 통계 • 기대 손실의 최적화

> **STEP II 2022, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

검사하는 T개의 스틱이 어떻게 되는지에 따라 경우를 나눈다. 그중 하나라도 감염되어 있으면 네트워크에는 아무것도 올라가지 않으므로 손실은 0이다. T개가 모두 깨끗할 때에만 네트워크에서의 도박이 시작된다. 기대 손실(expected loss)을 q의 함수로 쓰면 (ii)는 일변수 최대화(maximisation) 문제가 되고, (iii)은 연속한 T 값끼리 비교하여 해결한다. 이때 T는 정수이므로 도함수(derivative)가 아니라 차분(difference)을 쓴다.

풀이

이 풀이 전체에서 손실이 $-x$라는 것은 £x의 이득을 뜻한다. 순손실을 파운드 단위로 L이라 하자. 각 스틱은 서로 독립적으로 감염되고 깨끗할 확률(probability)은 각각 q이므로, 특정한 m개의 스틱이 모두 깨끗할 확률은 q^m이다. 대칭성에 의해 어느 T개의 스틱을 고르는지는 상관이 없다.

소문항 (i)

먼저 $T > 0$인 경우를 보자. 결과는 세 가지이다.

- 검사한 스틱 중 하나 이상이 감염되어 있다(확률 $1 - q^T$). 나머지는 폐기되고 아무것도 사용되지 않으므로 $L = 0$이다.
- 검사한 T개는 모두 깨끗하지만 나머지 $N - T$개 중 하나 이상이 감염되어 있다(확률 $q^T(1 - q^{N-T})$). 소독 비용을 내야 하므로 $L = D$이다.
- N개의 스틱이 모두 깨끗하다(확률 $q^T q^{N-T} = q^N$). 사용한 $N - T$개의 스틱 각각에서 £1씩 이득을 보므로 $L = -(N - T)$이다.

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(L) &= D\,q^T\left(1-q^{N-T}\right) - (N-T)\,q^N \\ &= D\,q^T - (N-T+D)\,q^N.\end{aligned}$$

$T = 0$이면 N개의 스틱을 모두 사용한다. 확률 $1-q^N$으로 $L = D$이고 확률 q^N으로 $L = -N$이므로 $D-(N+D)q^N$을 얻는다. 이는 같은 식에 $T=0$을 대입한 것과 같으므로, 모든 $0 \le T < N$에 대하여

$$\mathrm{E}(L) = D\,q^T - (N-T+D)\,q^N.$$

소문항 (ii)

α의 범위. $D>0, T\ge 0, N-T>0$이므로 분자와 분모는 $DT \ge 0, N(N-T+D)>0$을 만족하고, 따라서 $\alpha \ge 0$이다. 또한

$$N(N-T+D) - DT = N(N-T) + D(N-T) = (N-T)(N+D) > 0,$$

이므로 $DT < N(N-T+D)$이고 $\alpha < 1$이다.

최댓값. N, D, T를 고정하고 $0 \le q \le 1$에서 $f(q) = Dq^T - (N-T+D)q^N$이라 하자.

$T=0$이면 $\alpha = 0$이고 $f(q) = D-(N+D)q^N$은 q에 대해 감소하므로, 최댓값은 $q=0$, 즉 $q^N = 0 = \alpha$인 곳에서 나타난다.

$T \ge 1$이면 미분하여

$$f'(q) = DTq^{T-1} - N(N-T+D)q^{N-1} = N(N-T+D)\,q^{T-1}\left(\alpha - q^{N-T}\right).$$

> **생각해 보기** 이 정류점(stationary point)이 극대점이고, 나아가 구간 전체에서의 최댓값이라는 것을 어떻게 알 수 있을까?

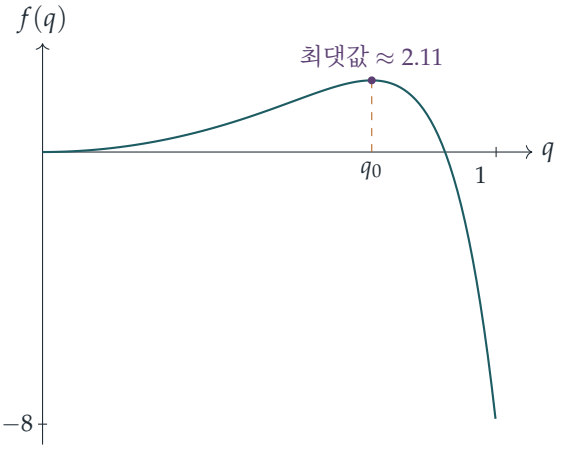
인수 $N(N-T+D)q^{T-1}$은 $0<q\le 1$에서 양수이다. $N-T \ge 1$이므로 q^{N-T}는 0에서 1까지 순증가하고, $0<\alpha<1$이므로 $q_0^{N-T} = \alpha$를 만족하는 $q_0 \in (0,1)$이 정확히 하나 존재한다. $q < q_0$이면 $f'(q) > 0$이고 $q > q_0$이면 $f'(q) < 0$이다. 따라서 f는 q_0까지 증가하다가 그 뒤로 감소하므로, $[0,1]$에서의 최댓값은 $q^{N-T} = \alpha$인 곳에서 나타난다. 이것이 보이려던 것이다.

최댓값의 크기. q_0에서 $q_0^{N-T} = \alpha$이므로 $q_0 = \alpha^{1/(N-T)}$이고 $q_0^T = \alpha^{T/(N-T)} = \alpha^k$이다. 그러면

$$\begin{aligned}f(q_0) &= q_0^T\left(D-(N-T+D)\,q_0^{N-T}\right) = \alpha^k\left(D-(N-T+D)\cdot\frac{DT}{N(N-T+D)}\right) \\ &= \alpha^k\left(D-\frac{DT}{N}\right) = \frac{D(N-T)\,\alpha^k}{N}.\end{aligned}$$

따라서 기대 순손실의 최댓값은 $£D(N-T)\alpha^k/N$이다. ($T=0$일 때 $\alpha^0=1$로 보면 이 값은 $£D$가 되어 $f(0)=D$와 일치한다.)

다음 그래프는 $N=10$, $T=2$, $D=5$일 때의 f를 나타낸 것이며, 이때 $\alpha=\frac{1}{13}$이다.



소문항 (iii)

이제 N, D, q를 고정하고 $E_T=Dq^T-(N-T+D)q^N$이라 하자. T는 정수 값만 가지므로 "T에 대해 증가한다"는 것은 $0\le T\le N-2$에 대하여 $E_{T+1}>E_T$라는 뜻이다. 빼면

$$\begin{aligned}E_{T+1}-E_T &= Dq^{T+1}-Dq^T+q^N\\ &= q^T\left(q^{N-T}-Dp\right),\end{aligned}$$

이다. 여기서 $q-1=-p$를 이용하였다.

> **생각해 보기** 괄호 안의 식은 T에 따라 달라진다. 어떻게 하나의 β가 모든 T에 대해 동시에 통할 수 있을까?

$0<q\le 1$이고 $N-T\le N$이므로 $q^{N-T}\ge q^N$이다. 따라서 T와 무관한 조건인 $q^N>Dp$만 성립하게 하면 충분하다. 베르누이 부등식(Bernoulli's inequality)에 의해

$$q^N=(1-p)^N\ge 1-Np.$$

이다. (이는 간단한 귀납법(induction)으로 보일 수 있다. $(1-p)^n\ge 1-np$이면 $(1-p)^{n+1}\ge(1-np)(1-p)=1-(n+1)p+np^2$이다.) 따라서 $1-Np>Dp$, 즉 $p<\dfrac{1}{N+D}$이면 $q^{N-T}\ge q^N\ge 1-Np>Dp$이고, 또한 $q^T>0$이다. 그러므로

$$\beta=\frac{1}{N+D}>0,$$

으로 두면 $p < \beta$인 모든 p에 대하여 모든 T에서 $E_{T+1} > E_T$가 성립하므로, 기대 손실은 T에 대한 증가함수이다.

이러한 p에 대해서는 $E_0, E_1, \ldots, E_{N-1}$ 중 가장 작은 값이 E_0이다. 따라서 p가 충분히 작으면 최선의 전략은 $T = 0$, 즉 아무것도 검사하지 않고 N개의 스틱을 모두 사용하는 것이다. 이는 자연스러운 결과이다. 감염이 드물다면 검사는 대개 돈을 벌어 줄 멀쩡한 스틱을 폐기할 뿐이기 때문이다.

검산

- $N = 1, T = 0$이면 식은 $D - (1 + D)q$가 된다. 확률 p로 D를 잃고 확률 q로 1을 얻으므로 예상과 일치한다.
- $q = 1$(감염이 전혀 없음)이면 $D - (N - T + D) = -(N - T)$가 되어, 확실히 $N - T$의 이득을 얻는다.
- $N = 10, T = 2, D = 5$이면 $\alpha = \frac{1}{13}, k = \frac{1}{4}$이고 최댓값은 $4 \cdot 13^{-1/4} \approx 2.107$로, 위 그래프의 꼭대기와 일치한다. 또한 $N \leq 7$에 대하여 가능한 모든 감염 패턴을 컴퓨터로 나열하여 소문항 (i)의 식을 확인하였다.
- $N = 10, D = 5, p = 0.3$($\beta = \frac{1}{15}$보다 훨씬 큼)이면 기대 손실은 오히려 T에 대해 **감소하여**, $T = 0$에서 약 4.58이던 것이 $T = 9$에서 0.03이 된다. 따라서 p에 대한 어떤 조건이 실제로 필요하다.

흔한 실수

- "검사한 스틱이 감염되어 있다"는 경우를 빠뜨리는 것. 이 경우는 기댓값에 0을 기여하지만 확률 $1 - q^T$를 차지한다.
- 이득을 $£(N - T)$가 아니라 $£N$으로 세는 것. 검사한 스틱은 깨끗하더라도 폐기된다.
- (iii)에서 아무 언급 없이 정수 T에 대해 미분하거나, T에 의존하는 β를 고르는 것.

STEP 너머

이것은 통계적 결정 이론(statistical decision theory)의 작은 문제이다. 모수(p)를 모를 때 기대 손실을 최소화하도록 행동(여기서는 T)을 고르는 것이다. 소문항 (ii)는 **미니맥스**(minimax) 발상이다. 각 전략에 대해 가능한 모든 p 중 최악의 경우를 찾는데, 이는 신중한 관리자가 비교해 볼 만한 값이다. 검사 비용과 놓친 결함의 비용 사이의 이러한 상충 관계는 합격 판정 샘플링(acceptance sampling)과 그룹 검사(group testing)의 바탕에도 깔

려 있다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 여기서 사용한 기댓값 도구를 익히기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.