풀이

STEP II 2022, 문제 10

역학 • 경사면 위의 포물체

> **STEP II 2022, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

소문항 (i)은 표준적인 궤적 방정식(trajectory equation)이며, 요령은 $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$를 이용하여 이 식을 $\tan\alpha$에 대한 이차식으로 읽는 것이다. 목표 지점을 맞힐 수 있는 것은 바로 그 이차방정식이 실근을 가질 때이므로, 문제 전체가 판별식(discriminant) 조건으로 귀결된다. 수평 좌표 (x, y)로 쓰면 이 조건은 원판(disc)을 나타내는 것으로 밝혀지고, 이후의 모든 소문항은 직선이 원과 만나는 곳을 읽어 내는 문제가 된다.

풀이

전체에 걸쳐 포사체(projectile)를 공기 저항 없이 중력만 받으며 자유롭게 운동하는 입자로 모형화하고, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$로 둔다.

소문항 (i)

발사 지점에서 잰 수평 거리와 높이를 생각한다. 시각 t에서

$$s = ut\cos\alpha, \qquad h = ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

수평 운동으로부터 $t = \dfrac{s}{u\cos\alpha}$이고, 이를 대입하면

$$h = s\tan\alpha - \frac{gs^2}{2u^2\cos^2\alpha},$$

이 되어 원하는 식을 얻는다.

소문항 (ii)

$P = (x, y, y\tan\theta)$라 하고, 대포로부터의 수평 거리를 $s = \sqrt{x^2+y^2}$로 쓴다. 대포는 어느 방향으로든 향할 수 있으므로 P를 지나는 연직 평면 안으로 조준한다. 그러면 운동은 그 평면 안에서 일어나고, 소문항 (i)에 의해 다음을 만족하는 각 α(대포가 아래쪽을 향할 수도 있으므로 음수일 수도 있다)가 필요하다.

$$y\tan\theta = s\tan\alpha - \frac{gs^2}{2u^2}(1+\tan^2\alpha).$$

$s = 0$이면 P는 원점이며, 이는 바로 위로 쏘면 도달할 수 있고, $\sec^2\theta > \tan^2\theta$이므로 아래의 부등식도 그곳에서 성립한다. $s > 0$이면 임의의 실수값을 가질 수 있는 $T = \tan\alpha$를 둔다. 조건은

$$\frac{gs^2}{2u^2}T^2 - sT + \left(y\tan\theta + \frac{gs^2}{2u^2}\right) = 0$$

이 실근 T를 갖는 것, 즉 판별식이 음이 아닌 것이다.

$$s^2 \geq 4\cdot\frac{gs^2}{2u^2}\left(y\tan\theta + \frac{gs^2}{2u^2}\right) \iff u^4 \geq 2gu^2 y\tan\theta + g^2s^2,$$

여기서 $s^2 > 0$으로 나누고 u^4를 곱하였다. g^2으로 나누고 $s^2 = x^2+y^2$을 이용하면

$$x^2 + y^2 + \frac{2u^2\tan\theta}{g}y \leq \frac{u^4}{g^2}.$$

y에 대하여 완전제곱식을 만들고 $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$를 이용하면

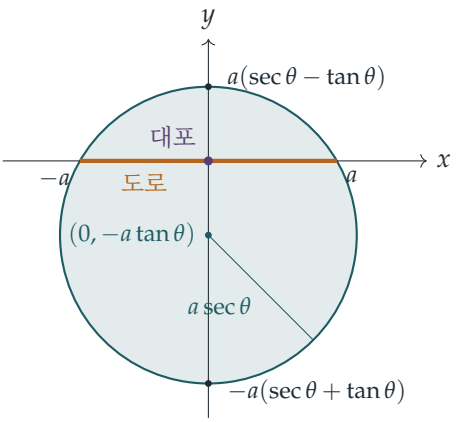
$$x^2 + \left(y + \frac{u^2\tan\theta}{g}\right)^2 \leq \frac{u^4}{g^2}(1+\tan^2\theta) = \frac{u^4\sec^2\theta}{g^2},$$

이 되며, 이것이 구하는 조건이다.

생각해 보기 포사체가 P에 도달하기 **전에** 경사진 지면에 부딪칠 수 있을까?

그렇지 않다. 발사가 이루어지는 연직 평면에서 포사체의 높이에서 지면의 높이를 뺀 값은 최고차항의 계수가 음수인 수평 거리에 대한 이차식(포물선에서 직선을 뺀 것)이며, 이 값은 대포의 위치와 P에서 0이 된다. 따라서 그 사이에서는 양수이다. 즉 포사체는 P에 떨어질 때까지 지면보다 위에 있다.

이제부터 $a = u^2/g$로 쓴다. 도달 가능한 점은 수평 사영이 중심 $(0, -a\tan\theta)$, 반지름 $a\sec\theta$인 원판 안에 놓이는 점들이다.



그림($\theta = 30°$로 그렸다)은 위에서 내려다본 도달 가능 영역을 보여 준다. "평면 위쪽"은 y의 양의 방향이다.

소문항 (iii)

평면을 따라 바로 위쪽은 $x = 0, y > 0$을 뜻한다. 조건은 $(y + a\tan\theta)^2 \le a^2\sec^2\theta$가 되고, $y + a\tan\theta > 0$이므로 이는

$$y \le a(\sec\theta - \tan\theta).$$

수평 좌표가 y인 평면 위의 점은 평면을 따라 재었을 때 원점으로부터 거리 $y\sec\theta$에 있다. 따라서 평면 위쪽으로 가장 먼 점까지의 거리는

$$a\sec\theta(\sec\theta - \tan\theta) = a\,\frac{1-\sin\theta}{\cos^2\theta} = a\,\frac{1-\sin\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} = \frac{u^2}{g(1+\sin\theta)},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

평면을 따라 바로 아래쪽은 $x = 0, y < 0$을 뜻한다. 이번에는 조건으로부터 $y \ge -a(\sec\theta + \tan\theta)$를 얻으므로, 평면 아래쪽으로 가장 먼 점은 대포로부터

$$a\sec\theta(\sec\theta + \tan\theta) = a\,\frac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{u^2}{g(1-\sin\theta)}$$

의 거리에 있다.

소문항 (iv)

도로는 직선 $y = 0$이다(이 직선은 평면 위에, 높이 0에 놓여 있다). 조건에 $y = 0$을 넣으면

$$x^2 \le a^2\sec^2\theta - a^2\tan^2\theta = a^2,$$

이므로 도달 가능한 도로 구간은 $-a \le x \le a$이고, 그 길이는 $\dfrac{2u^2}{g}$로 평평한 지면에서와 같다.

이제 대포를 $(0, c, c\tan\theta)$에 놓는다. 도로(x축)까지의 거리는 $\sqrt{c^2 + c^2\tan^2\theta} = |c|\sec\theta$이므로 $r = |c|\sec\theta$이다. 소문항 (ii)의 모든 내용은 **대포에 대한 상대적인** 위치에만 의존하고, 평면은 그 위의 어느 점에서 보아도 똑같이 보이므로, y를 $y - c$로 바꾼 조건을 쓸 수 있다. 도로($y = 0$)에 도달하는 곳은

$$x^2 \le a^2\sec^2\theta - (a\tan\theta - c)^2.$$

? **생각해 보기** 대포를 도로보다 위에 놓아야 할까, 아래에 놓아야 할까?

도달 가능한 길이는 $2\sqrt{a^2\sec^2\theta - (a\tan\theta - c)^2}$이며, 이는 빼는 제곱 항이 0일 때, 즉 $c = a\tan\theta > 0$일 때 최대이다. 따라서 대포는 도로에서 평면 **위쪽**으로, 도로가 도달 가능 원판의 중심을 지나기에 꼭 알맞은 만큼 올라가야 하며, 이때 도로는 지름을 잘라 낸다. 가장 좋은 거리는

$$r = a\tan\theta\sec\theta = \frac{u^2\sin\theta}{g\cos^2\theta},$$

이고, 도로의 최대 길이는 원판의 지름

$$2a\sec\theta = \frac{2u^2}{g\cos\theta}.$$

이다.

검산

- $\theta = 0$(평평한 지면)이면 소문항 (ii)는 $x^2 + y^2 \le (u^2/g)^2$이 되어, 모든 방향으로 익숙한 최대 사거리 u^2/g를 준다. (iii)의 두 답은 모두 u^2/g로 줄어들고, (iv)에서는 $r = 0$, 길이는 $2u^2/g$이다.
- 경사면 위쪽 방향의 답 $u^2/\big(g(1+\sin\theta)\big)$은 경사면 위쪽으로의 표준적인 최대 사거리이며, 원판이 옳다는 좋은 신호이다.
- $u = 12\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $\theta = 0.5\,\mathrm{rad}$로 두고 컴퓨터로 모든 발사각을 조사한 결과, 경사면 위쪽 최대 사거리는 9.932 m, 아래쪽은 28.226 m로 $u^2/\big(g(1\pm\sin\theta)\big)$과 일치하였다. 대포를 옮겼을 때 가장 긴 도로 길이는 $33.49\,\mathrm{m} = 2u^2/(g\cos\theta)$였다.

흔한 실수

- (x, y)를 평면을 따라 잰 거리로 취급하는 것. 이들은 수평 좌표이므로 평면 위쪽으로의 거리는 y가 아니라 $y\sec\theta$이다.
- 대포가 수평선 아래를 향할 수도 있다는 것을 잊는 것. $\tan\alpha$는 모든 실수값을 가지며, 그렇기 때문에 판별식 조건이 전부를 말해 준다.

- 옮긴 대포를 도로보다 아래에 놓는 것. 원판의 중심은 대포보다 경사면 아래쪽에 있으므로 대포는 도로보다 위에 있어야 한다.

STEP 너머

소문항 (ii)의 원판은 가능한 모든 궤적의 **포락선**(envelope)인 "안전 포물면(paraboloid of safety)" $z = \frac{u^2}{2g} - \frac{g(x^2+y^2)}{2u^2}$의 한 단면이다. 이 포물면을 임의의 평면과 교차시키면 이차곡선이 생기며, 여기서는 사영하면 원이 된다. 곡선족의 포락선은 역학과 미분방정식 모두에서 대학 1학년에 자연스럽게 다루는 주제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포사체 문제를 이런 기하학적 세심함으로 다루는 것을 보기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.