풀이

# STEP II 2022, 문제 1

순수수학 • 부분적분

> **STEP II 2022, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

## 핵심 아이디어

모든 소문항은 하나의 수에 기대고 있다. 부분적분(integration by parts)을 하면 두 번째 적분이 나오는데, 이 적분이 이미 가지고 있는 무언가와 상쇄되거나 거의 상쇄된다는 것이다. (i)과 (ii)에서는 피적분함수(integrand)가 어떤 곱의 도함수라는 사실을 알아보는 것이 핵심이다. (iii)에서는 같은 방법으로 두 적분의 차가 적분 구간의 양 끝에서 $\mathrm{e}^x/x$ 값의 변화량에 불과하다는 것을 보이며, 나머지는 (a)의 그래프가 해결해 준다.

## 풀이

### 소문항 (i)

첫째 항을 $u = \sqrt{1+x^3}$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 1$로 두고 부분적분한다. 그러면 $v = x$이고 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$이므로

$$\begin{aligned}\int 2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x &= 2x\sqrt{1+x^3} - 2\int x\cdot\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2x\sqrt{1+x^3} - \int \frac{3x^3}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

마지막 적분은 정확히 피적분함수의 둘째 항이므로, 이를 더하면 상쇄된다.

$$\int\left(2\sqrt{1+x^3} + \frac{3x^3}{\sqrt{1+x^3}}\right)\mathrm{d}x = 2x\sqrt{1+x^3} + c.$$

$2x\sqrt{1+x^3}$을 곱의 미분법(product rule)으로 미분하면 다시 $2\sqrt{1+x^3} + \dfrac{3x^3}{\sqrt{1+x^3}}$이 나오므로 결과가 확인된다.

**소문항 (ii)**

피적분함수를 $\dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{2\sin x}{x^3}$으로 나눈다. 어느 쪽도 단독으로는 초등 원시함수(elementary antiderivative)를 갖지 않으므로(첫째 항은 유명한 Si 적분의 피적분함수이다), (i)에서처럼 두 항이 합쳐져야 한다. 둘째 항을 $u = \sin x$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 2x^{-3}$으로 두고 부분적분하면 $v = -x^{-2}$이므로

$$\int \frac{2\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin x}{x^2} + \int \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

이제 $\dfrac{\cos x}{x^2}$를 $u = \cos x$, $v = -x^{-1}$로 두고 부분적분하면

$$\int \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos x}{x} - \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

$\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$가 첫째 항과 상쇄되어 다음이 남는다.

$$\int (x^2+2)\frac{\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} + c = -\frac{\sin x + x\cos x}{x^2} + c.$$

확인해 보면, $-\dfrac{\sin x}{x^2}$를 미분하면 $-\dfrac{\cos x}{x^2} + \dfrac{2\sin x}{x^3}$이 되고, $-\dfrac{\cos x}{x}$를 미분하면 $\dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{\cos x}{x^2}$이 된다. $\cos x/x^2$ 항끼리 상쇄되어 그 합은 피적분함수가 된다.

**소문항 (iii)(a)**

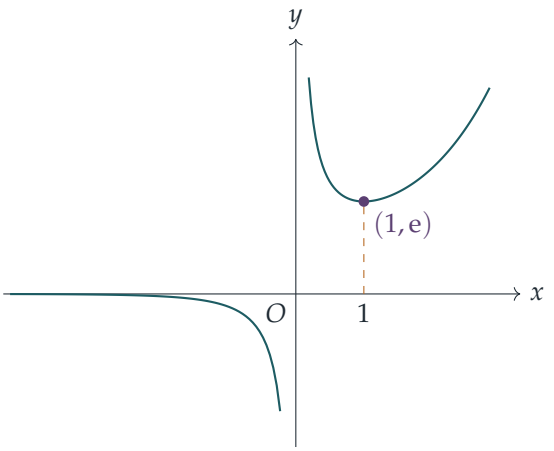
$x \neq 0$에서 정의된 $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$를 생각하자. 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}.$$

이 값은 $x = 1$에서만 0이므로, 정류점(stationary point)은 $(1, \mathrm{e})$ 하나뿐이다. 도함수는 $x < 1$ $(x \neq 0)$에서 음수이고 $x > 1$에서 양수이므로, $(1, \mathrm{e})$는 극소점(minimum)이다.

나머지 개형은 다음과 같다.

- $x < 0$이면 $y < 0$이고 $y$는 감소한다. $x \to -\infty$일 때 $y \to 0^-$이므로(지수함수가 이긴다), 음의 $x$축이 점근선(asymptote)이다. $x \to 0^-$일 때 $y \to -\infty$이다.
- $x > 0$이면 $y > 0$이다. $x \to 0^+$일 때 $y \to +\infty$이고, $y$는 $x = 1$에서 최솟값 e까지 감소한 뒤 어떤 다항식보다도 빠르게 $+\infty$로 증가한다.
- $y$축은 수직 점근선이고, 곡선은 어느 축과도 만나지 않는다.




**소문항 (iii)(b)**

$\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$을 $u = \mathrm{e}^x$, $v = -x^{-1}$로 두고 부분적분하면

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^x}{x} + \int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{이므로} \qquad \int \left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{x} + c.$$

(같은 말로, $\frac{\mathrm{e}^x}{x} - \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$은 (a)에서 구한 도함수이다.)

**생각해 보기** 애초에 $a$에서 $2a$까지 적분하는 것이 타당한가?

두 피적분함수 모두 $x = 0$에서 한없이 커지고, 0 근처에서 $\mathrm{e}^x/x^2$의 적분은 발산(diverge)하므로 적분 구간은 0을 피해야 한다. 이를 위해 $a \neq 0$이어야 한다. 그러면 $a$와 $2a$는 부호가 같으므로 0은 결코 그 사이에 있지 않고, 적분값은 유한하다.

두 적분은 그 차가 0일 때, 그리고 그때에만 같다.

$$\left[\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right]_a^{2a} = \frac{\mathrm{e}^{2a}}{2a} - \frac{\mathrm{e}^a}{a} = \frac{\mathrm{e}^a}{2a}\left(\mathrm{e}^a - 2\right) = 0.$$

$\mathrm{e}^a/(2a) \neq 0$이므로 $\mathrm{e}^a = 2$이어야 하고, 따라서

$$a = \ln 2.$$

**소문항 (iii)(c)**

(b)에서와 똑같이, 정수 $m \neq n$에 대해 두 적분이 유한하려면 0이 $m$과 $n$ 사이의 닫힌구간에 속하지 않아야 하므로, $m$과 $n$은 0이 아니고 부호가 같다. 두 적분의 차는

$$\int_m^n \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x - \int_m^n \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^n}{n} - \frac{\mathrm{e}^m}{m},$$

이므로, $f(x) = e^x/x$가 같은 값을 갖는 부호가 같은 서로 다른 두 정수가 필요하다. 다시 말해, 어떤 수평선이 (a)의 그래프와 두 정수 $x$값에서 만나야 한다.

> **생각해 보기** $x > 0$에서 곡선은 내려갔다가 다시 올라가므로 일대일(one-to-one)이 아니다. 그렇다면 왜 두 양의 정수가 같은 높이를 줄 수 없는가?

극점이 $x = 1$에 있고, 이것이 바로 가장 작은 양의 정수이기 때문이다. 경우를 차례로 살펴보자.

- **둘 다 음수인 경우.** (a)에 의해 $f$는 $x < 0$에서 순감소(strictly decreasing)하므로, $m \neq n$이면 $f(m) \neq f(n)$이다.
- **둘 다 양수인 경우.** 이때 $m, n \geq 1$이고, $x > 1$에서 $f'(x) > 0$이므로 $f$는 $[1, \infty)$에서 순증가(strictly increasing)한다. 역시 $m \neq n$이면 $f(m) \neq f(n)$이다.

수평선이 양의 가지와 두 번 만날 수는 있지만, 그 경우 두 교점 중 하나는 정수가 없는 $0 < x < 1$에 놓인다. 따라서 어떤 서로 다른 두 정수도 조건을 만족하지 않으며, 요구한 대로 불가능하다.

## 검산

- (i)에서 $x = 1$일 때 원시함수(antiderivative)의 값은 $2\sqrt{2}$이고, $[0, 1]$에서의 적분을 수치적으로 구하면 2.8284…로 일치한다.
- (ii)에서 $[1, 10]$에서의 적분을 수치적으로 계산하면 1.4711…이며, 이는 $-(\sin x + x\cos x)/x^2$의 변화량과 같다.
- (iii)(b)에서 $a = \ln 2$이면 두 적분 모두 약 1.9224가 된다. 또한 $f(\ln 2) = 2/\ln 2 = f(2\ln 2)$임에 주목하자. 그래프에서 짐작할 수 있듯이, 두 적분 끝점은 극소점의 양쪽에서 같은 높이에 놓인다.
- (iii)(c)에서 두 정수에서의 값이 가장 가까워지는 경우는 $f(1) = e \approx 2.718$과 $f(2) = \frac{1}{2}e^2 \approx 3.695$이다.

## 흔한 실수

- (b)와 (c)에서 0을 포함하는 구간에서는 적분이 의미가 없다는 것을 잊어, $m$과 $n$의 부호가 같아야 하는 이유를 놓치는 것.
- (c)에서 아무 제한 없이 "$f$는 일대일이다"라고 주장하는 것. 이는 사실이 아니다(예를 들어 $f(\ln 2) = f(2\ln 2)$). 논증에는 극점이 $x = 1$에 있다는 사실이 필요하다.

## STEP 너머

(i)과 (ii)는 피적분함수의 어느 항도 초등 원시함수를 갖지 않지만 그 합은 갖는 경우이다. 미분대수(differential algebra)의 리우빌(Liouville) 정리는 어떤 함수가 초등 원시함수를 갖는지를 엄밀하게 규정한다. $\mathrm{e}^x/x$, $\sin x/x$, $\sqrt{1+x^3}$은 초등 원시함수를 갖지 않으며, 그래서 상쇄가 필수적이다. (iii)(c)는 단사성(injectivity)에 관한 논증이며, 해석학 강의에서는 단조성(monotonicity)과 평균값 정리(mean value theorem)에 관한 이러한 추론을 엄밀하게 다룬다. Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.