풀이

STEP III 2021, 문제 9

역학 • 반발 계수가 있는 비스듬한 충돌

STEP III 2021, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

기하 부분은 모서리에 있는 두 삼각형 CPQ와 BRP에 사인 법칙(sine rule)을 한 번씩 적용하는 것이다. 두 식을 곱하면 CB 위에서 잰 QR의 공통 높이가 소거된다. 튕김에 대해서는, 매끄러운(smooth) 벽은 벽을 따르는 속도 성분을 그대로 두고 벽을 가로지르는 성분에는 e를 곱한다. 따라서 충돌 전후에 경로가 벽과 이루는 각은 $\tan(\text{충돌 후}) = e\tan(\text{충돌 전})$를 만족한다. 그러면 각 튕김에서 첫 번째 결과의 두 괄호 중 하나씩이 얻어진다.

풀이

기하학적 항등식

직선 QR와 BC 사이의 거리를 h라 하자. $QR \parallel CB$이므로 삼각형 AQR는 정삼각형이고, 따라서 $CQ = BR = h/\sin 60^\circ = 2h/\sqrt{3}$이다.

삼각형 CPQ에서 C에서의 각은 60°이고 P에서의 각은 θ이므로, Q에서의 각은 $120^\circ - \theta$이다. 사인 법칙에 의해

$$\frac{CP}{\sin(120^\circ - \theta)} = \frac{CQ}{\sin\theta} \quad \Longrightarrow \quad (a-x)\sin\theta = \frac{2h}{\sqrt{3}}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \tfrac{1}{2}\sin\theta\right).$$

$\sin\theta$로 나누고($0 < \theta < 180^\circ$이므로 이 값은 0이 아니다) 정리하면

$$\sqrt{3}\cot\theta + 1 = \frac{\sqrt{3}\,(a-x)}{h}.$$

삼각형 BRP에서 B에서의 각은 60°, R에서의 각은 ϕ, P에서의 각은 $120^\circ - \phi$이다. 사인 법칙에 의해

$$\frac{BP}{\sin\phi} = \frac{BR}{\sin(120^\circ - \phi)} \quad \Longrightarrow \quad x\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\phi + \tfrac{1}{2}\sin\phi\right) = \frac{2h}{\sqrt{3}}\sin\phi,$$

이므로

$$\sqrt{3}\cot\phi + 1 = \frac{4h}{\sqrt{3}\,x}.$$

두 결과를 곱하면 h와 $\sqrt{3}$이 소거된다.

$$(\sqrt{3}\cot\phi + 1)(\sqrt{3}\cot\theta + 1) = \frac{4(a-x)}{x},$$

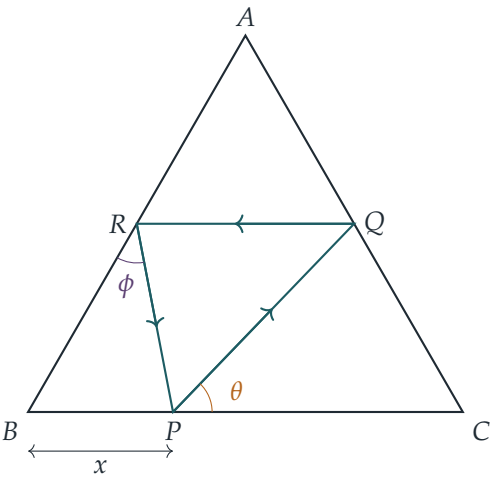
여기에 x를 곱하면 구하려는 항등식이 된다.

튕김

공을 매끄러운 탁자 위를 움직이는 입자로 모형화하면, 공은 충돌과 충돌 사이에 직선으로 움직인다. 틀도 매끄럽다고 하면, 각 충돌은 벽에 수직인 충격량(impulse)만 준다. 공이 속력 u로 벽과 각 α를 이루며 벽에 부딪히고, 속력 v로 벽과 각 β를 이루며 떠난다고 하자. 벽을 따르는 성분은 변하지 않고, 벽을 가로지르는 성분은 방향이 반대가 되며 e배가 된다.

$$v\cos\beta = u\cos\alpha, \qquad v\sin\beta = eu\sin\alpha \quad\Longrightarrow\quad \tan\beta = e\tan\alpha.$$

또한 공은 벽을 따라 같은 방향으로 계속 움직이므로, 그 방향에서 잰 α와 β는 모두 예각(acute angle)이다. ($e > 0$이어야 한다. 그렇지 않으면 공은 첫 충돌 후 벽을 따라 미끄러질 것이다.)



Q에서. 공은 PQ를 따라 벽 CA와 각 $\angle PQC = 120^\circ - \theta$를 이루며 A 쪽으로 움직이면서 도착한다. 그리고 QR를 따라 벽과 각 $\angle AQR = 60^\circ$를 이루며 떠난다($QR \parallel CB$이므로 동위각(corresponding angles)이다). 따라서

$$\tan 60^\circ = e\tan(120^\circ - \theta).$$

$\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$와 함께 차의 공식(subtraction formula)을 쓰고, 분모와 분자에 $\cot\theta$를 곱하면

$$\tan(120^\circ - \theta) = \frac{-\sqrt{3} - \tan\theta}{1 - \sqrt{3}\tan\theta} = \frac{\sqrt{3}\cot\theta + 1}{\sqrt{3} - \cot\theta}.$$

$c = \sqrt{3}\cot\theta$라 하자. 튕김 조건 $\sqrt{3}(\sqrt{3} - \cot\theta) = e(\sqrt{3}\cot\theta + 1)$은 $3 - c = e(c+1)$, 즉 $4 - (c+1) = e(c+1)$이 되므로

$$\sqrt{3}\cot\theta + 1 = \frac{4}{1+e}.$$

*R*에서. 공은 QR를 따라 벽 AB와 각 $\angle ARQ = 60^\circ$를 이루며 B 쪽으로 움직이면서 도착하고, RP를 따라 각 $\angle BRP = \phi$를 이루며 떠난다. 따라서

$$\tan\phi = e\tan 60^\circ = \sqrt{3}\,e, \qquad \text{따라서} \qquad \sqrt{3}\cot\phi = \frac{1}{e}, \qquad \sqrt{3}\cot\phi + 1 = \frac{1+e}{e}.$$

x 구하기. 두 괄호를 항등식에 대입하면

$$\frac{1+e}{e}\cdot\frac{4}{1+e}\cdot x = 4(a-x) \quad\Longrightarrow\quad x = e(a-x) \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{ae}{1+e},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

다시 한 바퀴 돌기

> **생각해 보기** 공이 다시 한 번 PQ를 따라 출발하려면 P에서 무슨 일이 일어나야 하는가?

공은 RP를 따라 P에 도달한다. 삼각형 BRP에서 이 경로는 BC와 각 $\angle RPB = 120^\circ - \phi$를 이루므로, 이 각이 예각일 때에만 공은 C 쪽으로 움직이며 도착한다. PQ를 다시 따라가려면 공은 PC와 각 θ를 이루며 떠나야 하므로, 다음이 필요하다.

$$\tan\theta = e\tan(120^\circ - \phi).$$

Q에서의 계산으로부터 $\sqrt{3}\cot\theta = \frac{4}{1+e} - 1 = \frac{3-e}{1+e}$이므로 $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}(1+e)}{3-e}$이고, 이 값은 양수이다. 즉 PQ는 실제로 C 쪽을 향한다.

Q에서와 같은 공식에 θ 대신 ϕ를 넣고 $\sqrt{3}\cot\phi = \frac{1}{e}$를 쓰면

$$\tan(120^\circ - \phi) = \frac{\sqrt{3}\,(\sqrt{3}\cot\phi + 1)}{3 - \sqrt{3}\cot\phi} = \frac{\sqrt{3}\,(1+e)/e}{(3e-1)/e} = \frac{\sqrt{3}(1+e)}{3e-1}.$$

$e \le \frac{1}{3}$이면 $120^\circ - \phi \ge 90^\circ$이므로, 충돌 후 공은 BC에서 곧바로 멀어지거나 B 쪽으로 되돌아간다. 그러면 C 쪽으로 기울어진 PQ를 따라갈 수 없다. 따라서 $e > \frac{1}{3}$이고, 조건은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\sqrt{3}(1+e)}{3-e} = \frac{\sqrt{3}e(1+e)}{3e-1} \quad\Longleftrightarrow\quad 3e - 1 = 3e - e^2 \quad\Longleftrightarrow\quad e^2 = 1.$$

$e > 0$이므로 $e = 1$이고, 이것이 구하려던 결과이다. 공의 속력은 충돌할 때마다 변하지만($e = 1$인 경우는 제외), 여기서 속력은 아무 역할도 하지 않는다. 오직 방향만이 중요하다.

검산

- $e = 1$일 때: $x = \frac{a}{2}$이고 $\tan\theta = \tan\phi = \sqrt{3}$이므로 $\theta = \phi = 60°$이며, PQR는 각 변의 중점을 이은 삼각형이다. 대칭성에 의해 이것은 예상대로 닫힌 완전 탄성(perfectly elastic) 궤도이다.
- $a = 1, e = \frac{1}{2}$일 때: $x = \frac{1}{3}$이고 $\theta \approx 46.10°$이다. 컴퓨터로 공을 세 번의 충돌에 걸쳐 따라가 보면 공은 정확히 P로 돌아온다. 그다음 충돌 후 공은 BC와 $46.10°$가 아니라 약 $68.95°$를 이루며 떠나므로, PQR를 다시 돌지 않는다.
- $e \to 0$이면 $x \to 0$이다. 즉 P는 모서리 B로 미끄러져 들어간다. 이는 공이 각 벽을 가로지르는 속도를 거의 모두 잃는 것과 잘 들어맞는다.

흔한 실수

- e를 속도 전체에, 또는 벽을 따르는 성분에 적용하는 것. 매끄러운 벽에 수직인 성분만 변한다.
- 입사각(angle of incidence)을 법선(normal)에서 잰 뒤, 벽에서 잰 각에 대해 성립하는 $\tan\beta = e\tan\alpha$를 쓰는 것. 법선에서 재면 법칙은 $\cot\beta = e\cot\alpha$이다.
- 마지막 부분에서 $120° - \phi$가 둔각(obtuse angle)일 수 있다는 것, 또는 $e = -1$을 버려야 한다는 것을 잊는 것.

STEP 너머

어떤 영역 안에서 튕기는 공의 경로는 **수학적 당구**(*mathematical billiards*)의 주제이다. $e = 1$일 때 중점을 이은 삼각형은 파냐노(Fagnano) 궤도이다. 임의의 예각삼각형에서 이 궤도는 수선의 발(feet of the altitudes)을 잇고, 둘레가 가장 짧은 내접 삼각형(inscribed triangle)이다. $e < 1$이면 튕길 때마다 경로가 벽 쪽으로 납작해지며, 여기서 확인했듯이 공은 닫힌 경로를 반복할 수 없다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충격량과 충돌을 꼼꼼하게 다룬다. 당구 자체에 대해서는 Tabachnikov의 *Geometry and Billiards*(기하와 당구)가 다음 단계로 읽기에 훌륭한 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.