풀이

STEP III 2021, 문제 8

순수수학 • 점화식과 극한

> **STEP III 2021, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 2.8 절 **제곱하고 2 빼기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch02/squaring-minus-two.html

핵심 아이디어

모든 것은 점화식(recurrence)을 인수분해(factorisation)하는 데 달려 있다. 양변에서 2를 빼면 $x_{n+1}-2=(x_n-2)(x_n+2)$가 되므로, 항들이 일단 2보다 커지면 2로부터의 거리는 매 단계마다 4보다 큰 수가 곱해진다. 이로부터 소문항 (i)이 나오고, 소문항 (ii)가 뒤따른다. 소문항 (iii)에서는 x_{n+1}^2에서 4를 빼도 똑같이 깔끔하게 인수분해되며, 바로 이 성질 때문에 곱 $x_1x_2\cdots x_n$이 연쇄적으로 소거된다(telescope).

풀이

소문항 (i)

n에 대한 수학적 귀납법(induction)을 사용한다. $n=1$일 때 주장은 $x_1\geq 2+4^0(a-2)=a$이고, 이는 등호로 성립한다($4^0=1$임에 유의한다).

어떤 $n\geq 1$에 대하여 $x_n\geq 2+4^{n-1}(a-2)$라고 가정하자. $a>2$이므로 우변은 2보다 크고, 따라서 $x_n>2$이다. 이제

$$x_{n+1}-2=x_n^2-4=(x_n-2)(x_n+2).$$

여기서 $x_n-2>0$이고 $x_n+2>4$이므로 $(x_n-2)(x_n+2)\geq 4(x_n-2)$이다. 귀납 가정(inductive hypothesis) $x_n-2\geq 4^{n-1}(a-2)$를 이용하면

$$x_{n+1}-2\geq 4(x_n-2)\geq 4\cdot 4^{n-1}(a-2)=4^n(a-2),$$

이고, 이는 $n+1$에 대한 주장이다. 귀납법에 의해 모든 $n \geq 1$에 대하여 $x_n \geq 2 + 4^{n-1}(a-2)$이다.

우리는 부등식을 한 번도 제곱하지 않았다. $x_n \geq$ (한계)를 제곱하는 것은 양변이 모두 음이 아닐 때에만 타당한데, 인수분해된 형태를 쓰면 이런 걱정을 아예 하지 않아도 된다.

소문항 (ii)

$|a| > 2$인 경우. 이때 $x_2 = a^2 - 2 > 4 - 2 = 2$이다. 수열 $x_2, x_3, \ldots$은 같은 점화식을 따르고 2보다 큰 값에서 시작하므로, a 대신 x_2를 넣어(첨자를 하나씩 옮겨) 소문항 (i)을 적용하면

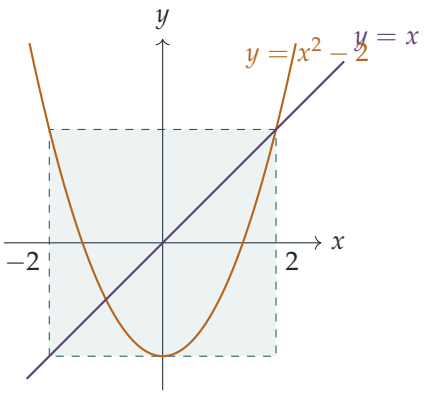
$$x_n \geq 2 + 4^{n-2}(x_2 - 2) \qquad (n \geq 2).$$

를 얻는다. $x_2 - 2 > 0$이고 $4^{n-2} \to \infty$이므로 $x_n \to \infty$이다.

$|a| \leq 2$인 경우. 모든 n에 대하여 $-2 \leq x_n \leq 2$임을 귀납법으로 보인다. 이는 $n = 1$일 때 성립한다. $-2 \leq x_n \leq 2$이면 $0 \leq x_n^2 \leq 4$이므로 $-2 \leq x_n^2 - 2 \leq 2$이고, 이는 $-2 \leq x_{n+1} \leq 2$를 뜻한다. 따라서 수열은 유계(bounded)이고 무한대로 발산할 수 없다.

> ? **생각해 보기** $|a| \leq 2$인 경우, 모든 n에 대하여 $x_n \leq 2$임을 보이는 것으로 충분한가?

그렇지 않다. 위쪽 한계만으로는 부족하다. -2보다 작은 항을 제곱하면 4보다 큰 값이 되고, 그다음 항은 2보다 커지기 때문이다. 그래서 귀납법에서 두 한계를 함께 다루어야 한다. 그래프를 보면 왜 이 방법이 통하는지 알 수 있다. 포물선(parabola) $y = x^2 - 2$는 구간 $[-2, 2]$를 자기 자신 위로 보낸다.



두 경우를 종합하면, $x_n \to \infty$일 필요충분조건은 $|a| > 2$이다.

소문항 (iii)

여기서 모든 것을 이끄는 인수분해는 다음과 같다.

$$x_{n+1}^2 - 4 = (x_n^2 - 2)^2 - 4 = x_n^4 - 4x_n^2 = x_n^2\,(x_n^2 - 4).$$

$a > 2$이므로 소문항 (i)에 의해 모든 n에 대하여 $x_n > 2$이고, 따라서 $x_n > 0$이며 $x_n^2 - 4 > 0$이다. 양의 제곱근을 취하면

$$\sqrt{x_{n+1}^2 - 4} = x_n \sqrt{x_n^2 - 4}.$$

이를 반복해서 적용하면(엄밀하게는 n에 대한 귀납법으로)

$$\sqrt{x_{n+1}^2 - 4} = x_n \sqrt{x_n^2 - 4} = x_n x_{n-1} \sqrt{x_{n-1}^2 - 4} = \cdots = x_1 x_2 \cdots x_n \sqrt{a^2 - 4}.$$

따라서 모든 $n \geq 1$에 대하여

$$\frac{\sqrt{x_{n+1}^2 - 4}}{x_{n+1}} = \frac{\sqrt{a^2 - 4}\, x_1 x_2 \cdots x_n}{x_{n+1}},$$

이고, 이를 y_n의 정의와 비교하면 요구된 식이 모든 n에 대하여 성립하는 것은 정확히 $A = \sqrt{a^2 - 4}$일 때임을 알 수 있다.

a 구하기. $A = \sqrt{a^2 - 4}$라는 값은 강제된다. $n = 1$일 때 요구된 식은 $Aa/x_2 = a\sqrt{a^2 - 4}/x_2$이고, $a > 0$이며 $x_2 > 0$이므로 $A = \sqrt{a^2 - 4}$를 얻는다. 역으로, $a > 2$에서 $A = \sqrt{a^2 - 4}$이면 $A^2 = a^2 - 4$이므로

$$a = \sqrt{A^2 + 4}.$$

이 값은 실제로 $a > 2$를 만족한다. $A > 0$이므로 $A^2 + 4 > 4$이기 때문이다. 이 a에 대하여 $\sqrt{a^2 - 4} = A$이고, 위에 보인 항등식은 모든 $n \geq 1$에 대하여 $y_n = \sqrt{x_{n+1}^2 - 4}\,/\,x_{n+1}$이 되어 요구된 결과를 얻는다.

수렴. 이 a의 값에 대하여, $x_{n+1} > 0$이므로

$$y_n = \frac{\sqrt{x_{n+1}^2 - 4}}{x_{n+1}} = \sqrt{1 - \frac{4}{x_{n+1}^2}}.$$

$a > 2$이므로 소문항 (ii)에 의해 $x_{n+1} \to \infty$이고, 따라서 $4/x_{n+1}^2 \to 0$이며 $y_n \to 1$이다. 두 번째 수열은 수렴(converge)하고, 그 극한(limit)은 1이다.

검산

- $A = 1$로 두면 $a = \sqrt{5} \approx 2.236$이다. 그러면 $x_2 = 3$, $x_3 = 7$이고 $y_1 = \sqrt{5}/3 \approx 0.745$이다. 공식으로 구하면 $\sqrt{9-4}/3 = \sqrt{5}/3$이므로 일치한다. 다음으로, $y_2 = \sqrt{5} \cdot$

$3/7 \approx 0.958$이고 $\sqrt{49-4}/7 = 3\sqrt{5}/7$이므로 역시 일치한다. 항 $y_3 \approx 0.99909$와 $y_4 \approx 0.9999996$은 1을 향해 빠르게 다가간다.

- $t > 1$인 $a = t + 1/t$로 치환하면 $x_n = t^{2^{n-1}} + t^{-2^{n-1}}$을 얻는다. 이를 보면 증가가 실제로 얼마나 빠른지 알 수 있으며(이중 지수적(doubly exponential)으로, 소문항 (i)의 4^{n-1}보다 훨씬 빠르다), 위의 모든 결과와도 들어맞는다.
- 소문항 (i)의 한계와 소문항 (ii)의 유계성은 여러 무작위 초깃값에 대하여 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- 양변이 모두 음이 아닌지 먼저 확인하지 않고 귀납 가정의 부등식을 제곱하는 것.
- 소문항 (ii)에서 $|a| \leq 2$일 때 $x_n \leq 2$만 보이는 것. $x_n \geq -2$도 필요하다. 그렇지 않으면 다음 항이 2보다 커질 수 있다.
- 거꾸로 계산하여 a를 구하고 나서, 그 값이 모든 n에 대하여 성립하는지, 그리고 $a > 2$를 만족하는지 확인하지 않는 것.

STEP 너머

사상(map) $x \mapsto x^2 - 2$는 이차 사상족(quadratic family) $x \mapsto x^2 + c$에서 가장 유명한 사상이다. $[-2, 2]$ 위에서 $x = 2\cos\theta$로 두면 이 사상은 각을 두 배로 하는 사상 $\theta \mapsto 2\theta$가 되는데, 이는 혼돈 역학(chaotic dynamics)의 대표적인 첫 번째 예이다. 그 구간 밖에서는 모든 궤도(orbit)가 무한대로 달아난다. $a > 2$일 때는 $x = 2\cosh u$로 두면 같은 아이디어가 통하며, 이때 소문항 (iii)의 곱은 고전적인 연쇄 소거 곱 $\prod \cos(\theta/2^k)$의 쌍곡(hyperbolic) 버전이 된다. 여기에 나온 극한과 귀납법의 바탕이 되는 해석학(analysis)에 대해서는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.