풀이

STEP III 2021, 문제 7

순수수학 • 기하에서의 복소수

> **STEP III 2021, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

단위원(unit circle) 위의 두 점을 더하거나 뺄 때, 즉 $e^{i\theta} \pm e^{i\phi}$에서는 "평균" 인수 $e^{i(\theta+\phi)/2}$를 묶어 낸다. 그러면 남는 것은 순수한 코사인 또는 순수한 사인이 되며, 바로 이 점 덕분에 소문항 (i)이 풀린다. 그러면 소문항 (i)은 $(a+b)/(a-b)$가 순허수(purely imaginary)라는 것을 말해 주고, 복소평면(complex plane)에서 "비가 순허수"라는 것은 "수직"이라는 뜻이다. 그다음부터는 a, b, c, d의 합을 정리하는 일일 뿐이다.

풀이

소문항 (i)

$\alpha = \frac{1}{2}(\theta+\phi)$, $\beta = \frac{1}{2}(\theta-\phi)$로 두면 $\theta = \alpha+\beta$, $\phi = \alpha-\beta$이다. 그러면

$$e^{i\theta} + e^{i\phi} = e^{i\alpha}\left(e^{i\beta} + e^{-i\beta}\right) = 2\cos\beta\, e^{i\alpha},$$
$$e^{i\theta} - e^{i\phi} = e^{i\alpha}\left(e^{i\beta} - e^{-i\beta}\right) = 2i\sin\beta\, e^{i\alpha}.$$

조건 $\theta - \phi \neq 2n\pi$는 정확히 β가 π의 배수가 아니라는 뜻이므로 $\sin\beta \neq 0$이고 분모는 0이 아니다. 나누면

$$z = \frac{2\cos\beta}{2i\sin\beta} = -i\cot\beta = -i\cot\left(\tfrac{1}{2}(\theta-\phi)\right) = i\cot\left(\tfrac{1}{2}(\phi-\theta)\right),$$

이다. 여기서 $1/i = -i$와 cot이 기함수(odd function)라는 사실을 썼다. 이것이 구하는 결과이다.

$\cot(\frac{1}{2}(\phi-\theta))$는 실수이므로 z는 허수축 위에 있다.

$$|z| = \left|\cot\left(\tfrac{1}{2}(\phi-\theta)\right)\right|, \qquad \arg z = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & \text{만약 } \cot(\frac{1}{2}(\phi-\theta)) > 0, \\ -\frac{1}{2}\pi & \text{만약 } \cot(\frac{1}{2}(\phi-\theta)) < 0. \end{cases}$$

$\cot(\frac{1}{2}(\phi-\theta)) = 0$이면, 즉 $\phi-\theta$가 π의 홀수 배이면 $z=0$이고 그 편각(argument)은 정의되지 않는다. (이는 두 점이 지름의 양 끝에 있어서 그 합이 O이 되는 경우이다.)

소문항 (ii)

A와 B는 원점이 중심인 단위원 위에 있으므로 $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$로 쓴다. 두 점은 서로 다르므로 $\theta-\phi$는 2π의 배수가 아니고, 소문항 (i)을 적용할 수 있다.

$$\frac{x}{a-b} = \frac{a+b}{a-b} = \mathrm{i}k, \qquad k = \cot\left(\tfrac{1}{2}(\phi-\theta)\right) \in \mathbb{R}.$$

$x = a+b \neq 0$이므로 $k \neq 0$이다. 따라서 $x = \mathrm{i}k\,(a-b)$이다. 즉 (x가 나타내는) 벡터 $\overrightarrow{OX}$는 ($a-b$가 나타내는) 벡터 $\overrightarrow{BA}$를 직각만큼 회전하고 O이 아닌 실수 k배 한 것이다. 같은 말로, $\arg x - \arg(a-b) = \pm\frac{1}{2}\pi$이다. 그러므로 OX는 AB에 수직이다.

? **생각해 보기** 왜 $a+b \neq 0$이 필요한가?

$a+b=0$이면 X는 원점 자체이다. 그러면 직선 OX가 없으므로 수직일 대상도 없다. 대수적으로는 이것이 $k=0$인 경우이며, 이때 x의 편각은 정의되지 않는다.

소문항 (iii)

$h = a+b+c$이면

$$h - a = b + c.$$

이다. 복소수 $h-a$는 벡터 $\overrightarrow{AH}$를 나타낸다. 두 가지 경우가 있다.

- $b+c=0$이면 $h-a=0$이므로 $h=a$이다.
- $b+c \neq 0$이면 단위원 위의 서로 다른 두 점 B와 C에 소문항 (ii)를 적용한다. 그러면 $b+c$가 나타내는 벡터는 BC에 수직이다. 그 벡터가 $\overrightarrow{AH}$이므로 AH는 BC에 수직이다. (이때 $H \neq A$이므로 AH는 실제로 직선이다.)

따라서 $h = a$이거나 $AH \perp BC$이며, 이것이 증명할 내용이다. 대칭성에 의해 BH와 CA, CH와 AB에 대해서도 같은 것이 성립하므로 H는 실제로 수선(altitude)들 위에 있다. $h=a$인 경우는 BC가 지름일 때이다. 이때 삼각형은 A에서 직각을 가지며, 수심(orthocentre)은 꼭짓점 A이다.

소문항 (iv)

수심의 정의에 의해

$$p = a+b+c, \qquad q = b+c+d, \qquad r = c+d+a, \qquad s = d+a+b.$$

이다. AQ의 중점은

$$\tfrac{1}{2}(a+q) = \tfrac{1}{2}(a+b+c+d).$$

이다. 이 식은 a, b, c, d에 대해 대칭이므로 BR, CS, DP의 중점이기도 하다.

$$\tfrac{1}{2}(b+r) = \tfrac{1}{2}(c+s) = \tfrac{1}{2}(d+p) = \tfrac{1}{2}(a+b+c+d).$$

$m = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$가 나타내는 점을 M이라 하자. 그러면

$$q = 2m-a, \qquad r = 2m-b, \qquad s = 2m-c, \qquad p = 2m-d.$$

이다. 따라서 하나의 사상

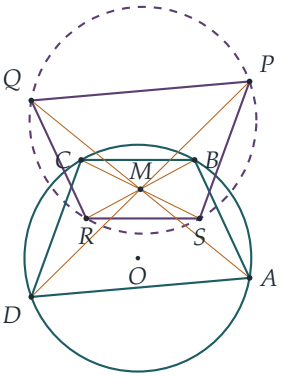
$$T : w \longmapsto 2m-w$$

가 $A \mapsto Q$, $B \mapsto R$, $C \mapsto S$, $D \mapsto P$로 보낸다. 그러므로 이 사상은 사각형 $ABCD$를 꼭짓점끼리 대응시켜 $QRSP$로 옮긴다.

T를 설명하기 위해 $T(w) - m = -(w-m)$으로 쓴다. M으로부터의 변위가 반대로 뒤집히는데, 이는 M을 중심으로 $e^{i\pi}$를 곱하는 것이다. 따라서

T는 복소수 $\frac{1}{2}(a+b+c+d)$가 나타내는 점 M을 중심으로 하는 180° 회전(반회전, *half-turn*)이다.

같은 말로, T는 점 M에 대한 점대칭(point reflection)이다. 특히 $QRSP$는 $ABCD$와 합동이고, 회전은 방향을 보존하므로 Q, R, S, P도 시계 반대 방향으로 놓인다. 네 수심은 복소수 $a+b+c+d$가 나타내는 점을 중심으로 하는 단위원 위에 있으며, 이 원은 A, B, C, D를 지나는 원의 상이다.



검산

- 소문항 (i): $\theta = 0, \phi = \frac{1}{2}\pi$이면 $z = (1+\mathrm{i})/(1-\mathrm{i}) = \mathrm{i}$이고, $\mathrm{i}\cot\frac{1}{4}\pi = \mathrm{i}$이다. 따라서 $|z| = 1, \arg z = \frac{1}{2}\pi$이다.
- 소문항 (iv): $a = 1, b = \mathrm{i}, c = -1, d = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i}$로 잡자. 그러면 $m = 0.3 + 0.1\mathrm{i}$이고 $q = b + c + d = -0.4 + 0.2\mathrm{i}$이며, 이는 주장한 대로 $2m - a$와 같다. 정사각형$(a, b, c, d = 1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i})$이면 $m = 0$이고 Q, R, S, P는 그냥 C, D, A, B이다. 즉 반회전의 중심이 O이다.
- 네 소문항 모두 원 위의 무작위 점 수천 개에 대해 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- $\arg z = \frac{1}{2}\pi$만 답하는 것. 코탄젠트의 부호에 따라 $\pm\frac{1}{2}\pi$ 중 하나가 정해지며, $z = 0$은 편각이 없다.
- 소문항 (iv)에서 꼭짓점을 잘못된 순서로 대응시키는 것. A는 P가 아니라 Q로 간다. 각 꼭짓점에 대응하는 수심은 그 꼭짓점을 **빼고** 만든 삼각형의 수심이다.
- 사상을 중심과 각도 없이 "회전"이라고만 하거나, 중심 없이 "닮음비 -1인 확대"라고만 설명하는 것. 어느 설명이든 괜찮지만, 두 가지 정보가 모두 필요하다.

STEP 너머

(외심을 원점에 두었을 때의) 깔끔한 공식 $h = a + b + c$는 복소수를 이용한 기하학이라는 한 분야 전체의 출발점이다. 예를 들어 무게중심(centroid)은 $\frac{1}{3}(a + b + c)$이므로 O, 무게중심, H는 한 직선, 즉 오일러 직선(Euler line) 위에 있다. 소문항 (iv)는 원에 내접하는 사각형(cyclic quadrilateral)에 대한 같은 이야기의 작은 조각이다. Tristan Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 처음부터 끝까지 복소수의 곱셈을 회전과 확대로 다루며, 다음 단계로 삼기에 훌륭한 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.