풀이

STEP III 2021, 문제 6

순수수학 • 역함수와 도함수

> **STEP III 2021, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

두 함수 모두 겉보기에는 까다로워 보이지만, 도함수(derivative)는 매우 간단하다. 도함수가 $\frac{1}{1+x^2}$인 함수는 $\tan^{-1} x$에 상수를 더한 것이어야 하고, 도함수가 0인 함수는 상수이다. 단, 이는 함수가 정의된 각 구간(interval)에서만 성립한다. 따라서 실제로 해야 할 일은 편리한 값이나 극한(limit)을 이용해 분리된 각 조각에서의 상수를 구하고, 함수가 정의되지 않는 점에서 생기는 도약(jump)을 주의 깊게 살피는 것이다.

풀이

소문항 (i)

$t = \tan\alpha$라 두면 $t > 0$이고, $u = \dfrac{xt+1}{t-x}$라 하면 $f_\alpha(x) = \tan^{-1} u$이다. 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{t(t-x)+(xt+1)}{(t-x)^2} = \frac{1+t^2}{(t-x)^2},$$

이고

$$1+u^2 = \frac{(t-x)^2+(xt+1)^2}{(t-x)^2} = \frac{t^2+x^2+x^2t^2+1}{(t-x)^2} = \frac{(1+t^2)(1+x^2)}{(t-x)^2}.$$

따라서 연쇄법칙(chain rule)에 의해

$$f'_\alpha(x) = \frac{1}{1+u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

생각해 보기 이것은 하나의 상수 c에 대해 $f_\alpha(x) = \tan^{-1} x + c$라는 뜻인가?

그렇지 않다. 이 함수는 $x = \tan\alpha$에서 정의되지 않으므로 정의역(domain)은 분리된 두 구간이고, 각 구간에서 $f_\alpha(x) - \tan^{-1} x$의 도함수가 0이므로 상수이지만, 두 상수가 같을 필요는 없다.

$x < \tan\alpha$일 때: $0 < \frac{1}{2}\pi - \alpha < \frac{1}{2}\pi$이므로 $x = 0$에서 $f_\alpha(0) = \tan^{-1}(\cot\alpha) = \frac{1}{2}\pi - \alpha$이다. 따라서

$$f_\alpha(x) = \tan^{-1} x + \tfrac{1}{2}\pi - \alpha \qquad (x < \tan\alpha).$$

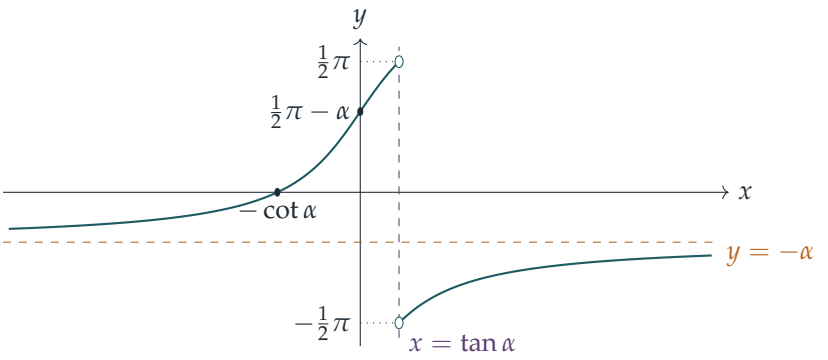
$x > \tan\alpha$일 때: 위쪽에서 $x \to \tan\alpha$일 때, 분자 $xt + 1$은 $1 + t^2 > 0$으로 가고 분모 $t - x$는 음수 값을 거쳐 0으로 가므로 $u \to -\infty$이고 $f_\alpha(x) \to -\frac{1}{2}\pi$이다. $\tan^{-1} x \to \alpha$이므로 상수는 $-\frac{1}{2}\pi - \alpha$이다:

$$f_\alpha(x) = \tan^{-1} x - \tfrac{1}{2}\pi - \alpha \qquad (x > \tan\alpha).$$

(아래쪽에서 같은 극한 논법을 쓰면 $u \to +\infty$이고 값은 $\frac{1}{2}\pi$가 되어 첫 번째 식과 일치한다.)

따라서 그래프는 $y = \tan^{-1} x$의 그래프를 두 조각으로 나누어, 한 조각은 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$만큼 위로, 다른 조각은 $\frac{1}{2}\pi + \alpha$만큼 아래로 평행이동한 것이다. 그 특징은 다음과 같다.

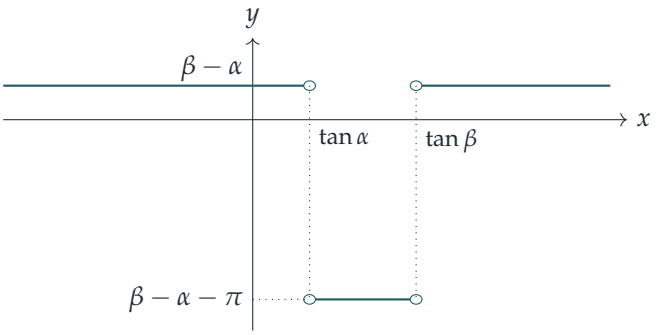
- 각 조각에서 증가하며, 기울기는 $\frac{1}{1+x^2}$이다;
- $x \to \pm\infty$일 때 $y \to -\alpha$이므로(왼쪽에서는 위에서, 오른쪽에서는 아래에서 다가간다) $y = -\alpha$는 양 끝에서 점근선(asymptote)이다;
- 왼쪽 조각은 $-\alpha$에서 $x = \tan\alpha$의 $\frac{1}{2}\pi$(도달하지 않음)까지 올라가며, y축과는 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$에서 만나고, x축과는 $\tan^{-1} x = \alpha - \frac{1}{2}\pi$인 곳, 즉 $x = -\cot\alpha$에서 만난다;
- 오른쪽 조각은 $x = \tan\alpha$에서 $-\frac{1}{2}\pi$ 바로 위에서 시작해 $-\alpha$까지 올라가며, 전체가 x축 아래에 있다;
- $x = \tan\alpha$에서 $-\pi$만큼의 도약이 있고, 그 점에서 두 조각의 기울기는 모두 $\cos^2\alpha$이다.



차. $0 < \alpha < \beta < \frac{1}{2}\pi$이므로 $\tan\alpha < \tan\beta$이고, 따라서 구간이 세 개 생긴다. 각 함수에 대한 두 식을 이용하면 다음과 같다.

- $x < \tan\alpha$일 때: $f_\alpha(x) - f_\beta(x) = (\frac{1}{2}\pi - \alpha) - (\frac{1}{2}\pi - \beta) = \beta - \alpha$;
- $\tan\alpha < x < \tan\beta$일 때: $f_\alpha(x) - f_\beta(x) = (-\frac{1}{2}\pi - \alpha) - (\frac{1}{2}\pi - \beta) = \beta - \alpha - \pi$;
- $x > \tan\beta$일 때: $f_\alpha(x) - f_\beta(x) = (-\frac{1}{2}\pi - \alpha) - (-\frac{1}{2}\pi - \beta) = \beta - \alpha$.

$\tan^{-1} x$ 항이 소거되므로 그래프는 계단 함수(step function)이다. 즉 그래프는 수평선 $y = \beta - \alpha$(0과 $\frac{1}{2}\pi$ 사이에 있다)이되, $\tan\alpha$와 $\tan\beta$ 사이의 구간에서는 π만큼 내려가 $y = \beta - \alpha - \pi$($-\pi$와 $-\frac{1}{2}\pi$ 사이에 있다)가 된다. 함수는 $x = \tan\alpha$와 $x = \tan\beta$에서 정의되지 않는다.



소문항 (ii)

각 항을 미분한다. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\tanh^{-1} s = \dfrac{1}{1-s^2}$이므로

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh^{-1}(\sin x) = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x,$$

이고, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\sinh^{-1} s = \dfrac{1}{\sqrt{1+s^2}}$이므로

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh^{-1}(\tan x) = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\sec^2 x}} = \frac{\sec^2 x}{|\sec x|} = |\sec x|.$$

제곱근은 양의 제곱근이므로 절댓값(modulus)이 나타난다. 따라서 $g'(x) = \sec x - |\sec x|$이다. $\frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$에서는 $\cos x < 0$이므로 $|\sec x| = -\sec x$이고

$$g'(x) = 2\sec x,$$

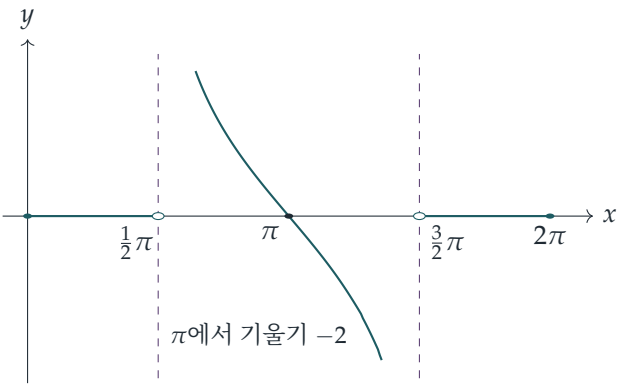
이 되어 원하는 결과를 얻는다. 나머지 두 구간 $0 \le x < \frac{1}{2}\pi$와 $\frac{3}{2}\pi < x \le 2\pi$에서는 $\cos x > 0$이므로 같은 계산으로 $g'(x) = 0$을 얻는다.

바깥쪽 구간. 여기서 g는 각 구간에서 상수이다. $g(0) = \tanh^{-1} 0 - \sinh^{-1} 0 = 0$이고 마찬가지로 $g(2\pi) = 0$이므로, $0 \le x < \frac{1}{2}\pi$와 $\frac{3}{2}\pi < x \le 2\pi$에서 $g(x) = 0$이다.

가운데 구간. 여기서 $g'(x) = 2\sec x < 0$이므로 g는 순감소(strictly decreasing)한다. 중점에서 $g(\pi) = \tanh^{-1} 0 - \sinh^{-1} 0 = 0$이고 $g'(\pi) = 2\sec \pi = -2$이다. 양 끝에서는 다음과 같다.

- $x \to \frac{1}{2}\pi^+$일 때 $\sin x \to 1$이므로 $\tanh^{-1}(\sin x) \to +\infty$이고, $\tan x \to -\infty$이므로 $-\sinh^{-1}(\tan x) \to +\infty$이다. 따라서 $g(x) \to +\infty$이다;
- $x \to \frac{3}{2}\pi^-$일 때 $\sin x \to -1$이고 $\tan x \to +\infty$이므로, 두 항 모두 $g(x) \to -\infty$가 되게 한다.

또한 $g''(x) = 2\sec x \tan x$이다. $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$에서는 $\sec x$와 $\tan x$가 모두 음수이므로 $g'' > 0$이고, $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$에서는 $\sec x < 0 < \tan x$이므로 $g'' < 0$이다. 따라서 $(\pi, 0)$은 기울기가 -2인 변곡점(point of inflection)이고, 곡선은 이 점에 대해 회전 대칭(rotational symmetry)이다(실제로 $g'(2\pi - x) = g'(x)$이고 $g(\pi) = 0$이다). 사실 이 구간에서 g와 $2\tanh^{-1}(\sin x)$는 도함수가 같고 둘 다 π에서 값이 0이므로, 이 구간에서 $g(x) = 2\tanh^{-1}(\sin x) = 2\ln|\sec x + \tan x|$이다.



검산

- $\alpha = 0.6$일 때: $f_\alpha(0) = \tan^{-1}(\cot 0.6) \approx 0.9708 = \frac{1}{2}\pi - 0.6$이고, 점근선이 예측하는 대로 $f_\alpha(\pm 10^9) \approx -0.6$이다.
- $g(1) = \tanh^{-1}(\sin 1) - \sinh^{-1}(\tan 1) = 1.2261 - 1.2261 = 0$이므로 평평한 조각이 확인된다. 수천 개의 무작위 점을 컴퓨터로 확인한 결과, 위의 모든 식이 10^{-6} 이내로 일치하였다.

흔한 실수

- 모든 곳에서 하나의 상수로 $f_\alpha(x) = \tan^{-1} x + c$라고 쓰는 것. 도함수가 0이라는 사실은 구간 위에서만 상수임을 보장한다.
- $\sqrt{\sec^2 x} = \sec x$라고 쓰는 것. 이는 $|\sec x|$이며, 바로 이 부호 때문에 g가 두 구간에서는 0이고 세 번째 구간에서는 그렇지 않다.

STEP 너머

구간에서 도함수가 0이면 상수라는 사실은 평균값 정리(Mean Value Theorem)의 결과이며, 두 소문항이 모두 보여 주듯 구간이 아닌 집합에서는 성립하지 않는다. 소문항 (i)은 $\pm\pi$만큼의 보정이 붙은 $\tan^{-1}$의 덧셈 정리(addition formula)로, 복소해석학(complex analysis)에서 핵심적인 분지(branch) 관리의 일종이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)는 평균값 정리와 그 결과들을 꼼꼼하게 설명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.