풀이

STEP III 2021, 문제 5

순수수학 • 극곡선

> **STEP III 2021, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

두 곡선 모두 r가 θ의 식으로 주어져 있으므로, 두 곡선은 r에 대한 두 식이 같아지는 곳에서 만나고, 여기에 더해 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$의 두 값까지 같아지는 곳에서 접한다(touch). 모든 것을 $c = \cos\theta$로 나타내면 만날 조건은 c에 대한 이차방정식(quadratic)이 된다. 이 이차방정식의 중근(repeated root)은 접하는 한 가지 경우를 주지만, 그것만 있는 것은 아니다. $\cos\theta$ 자체가 $\theta = 0$과 $\theta = \pi$에서 정류(stationary)하므로, $c = \pm 1$에서의 단순근(simple root)도 θ에 대해서는 이중 영점을 준다.

풀이

풀이 전체에서 $c = \cos\theta$로 쓰고,

$$f(\theta) = a + 2\cos\theta, \qquad g(\theta) = 2 + \cos 2\theta = 1 + 2\cos^2\theta.$$

로 둔다. 모든 θ에 대하여 $g(\theta) \geq 1$이므로 두 번째 곡선은 원점 O를 지나지 않는다. O가 아닌 곳에서 $r > 0$인 점은 (2π의 배수 차이를 제외하면) 유일한 각 θ를 가진다. 따라서 두 곡선은 r와 θ가 모두 같은 점에서만 만날 수 있다.

소문항 (i)

두 곡선은 $f(\theta) = g(\theta)$일 때, 곧 $a + 2c = 1 + 2c^2$일 때 만난다. 이를 정리하면

$$2\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1 - a = 0,$$

이 되어 구하는 식을 얻는다. 차이에 이름을 붙여 두면 편리하다.

$$h(\theta) = f(\theta) - g(\theta) = -(2c^2 - 2c + 1 - a).$$

언제 접하는가? 공통점에서 동경과 접선 사이의 각 ψ는 $\tan\psi = r/\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$를 만족한다. 따라서 같은 점 (r,θ)를 지나는 두 곡선은 그 점에서 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$도 같을 때, 그리고 그때에만 같은 접선을 가진다. 그러므로 두 곡선은 $h(\theta) = 0$이고 $h'(\theta) = 0$인 곳에서 접한다. 미분하면

$$h'(\theta) = -2\sin\theta + 2\sin 2\theta = 2\sin\theta\,(2\cos\theta - 1).$$

이다. 따라서 $h'(\theta) = 0$인 것은 정확히 $\cos\theta = \frac{1}{2}$ 또는 $\sin\theta = 0$일 때이다.

> **생각해 보기** c에 대한 이차방정식이 중근을 가지는 것은 $a = \frac{1}{2}$일 때뿐이다. 그렇다면 왜 다른 a의 값이 있는가?

c에 대한 중근은 접하기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다. 사상 $\theta \mapsto \cos\theta$는 $\theta = 0$과 $\theta = \pi$에서 정류한다. 따라서 $c = \pm 1$이 근이기만 하면, h는 그곳에서 θ에 대한 이중 영점을 가진다. 조건 $h' = 0$은 이 두 가능성을 모두 담고 있다.

- $\cos\theta = \frac{1}{2}$: 만날 조건의 식에 대입하면 $\frac{1}{2} - 1 + 1 - a = 0$이므로 $a = \frac{1}{2}$이다. (같은 말이지만, 판별식(discriminant) $4 - 8(1-a)$는 $a = \frac{1}{2}$일 때 0이 되고, 이때 중근은 $c = \frac{1}{2}$이다.) 따라서 $a = \frac{1}{2}$일 때 두 곡선은 접하며, 이것이 보여야 할 내용이다.
- $\theta = 0$, $c = 1$: $2 - 2 + 1 - a = 0$이어야 하므로 $a = 1$이다. 이때 두 곡선 모두에서 $r = 3$이다.
- $\theta = \pi$, $c = -1$: $2 + 2 + 1 - a = 0$이어야 하므로 $a = 5$이다. 이때 두 곡선 모두에서 $r = 5 - 2 = 3$이므로 $r \geq 0$이 성립한다.

따라서 나머지 두 값은 $a = 1$과 $a = 5$이다.

두 번째 곡선의 특징

세 개의 개형 모두에 $r = 2 + \cos 2\theta$가 들어가므로, 이 곡선을 한 번에 설명해 둔다. 이 곡선은 $\theta \to -\theta$와 $\theta \to \pi - \theta$에 대해 변하지 않으므로 두 축 모두에 대해 대칭이다. 여기서 r는 $\theta = 0, \pi$에서의 최댓값 3부터 $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$에서의 최솟값 1까지 변한다. 이 곡선은 타원(ellipse)이 **아니다**. $\theta = \frac{1}{2}\pi$ 근처에서 $s = \sin\theta$로 두면

$$y = r\sin\theta = (3 - 2s^2)s = 3s - 2s^3, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = 3 - 6s^2 = -3\text{ , 단}s = 1.$$

이다. 따라서 θ가 $\frac{1}{2}\pi$에서 멀어질 때 (s가 1보다 작아질 때) y는 **증가한다**. 그곳에서 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = -2\sin 2\theta = 0$이고 접선이 수평이므로, 곡선은 $(0, \pm 1)$에서 첨점(cusp)이 아니라 매끄럽게 움푹 들어간 부분(오목한 홈)을 가진다. 반면 $x = r\cos\theta = c + 2c^3$은 c에 대한 증가함수이므로 $(\pm 3, 0)$의 양 끝은 그냥 둥글다.

첫 번째 곡선 $r = a + 2\cos\theta$는 $\theta \to -\theta$에 대해 변하지 않으므로 시초선(initial line)에 대해 대칭이다. 이 곡선은 $\theta = 0$에서 $r = a + 2$, $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$에서 $r = a$, 그리고 ($a \geq 2$일 때)

$\theta = \pi$에서 $r = a - 2$이다. $a < 2$이면 제한 조건 $r \geq 0$ 때문에 $\cos\theta = -\frac{1}{2}a$인 곳에서 곡선이 잘리고, 곡선은 그 두 방향을 따라 O에 도달한다.

소문항 (ii)

$a = \frac{1}{2}$이면

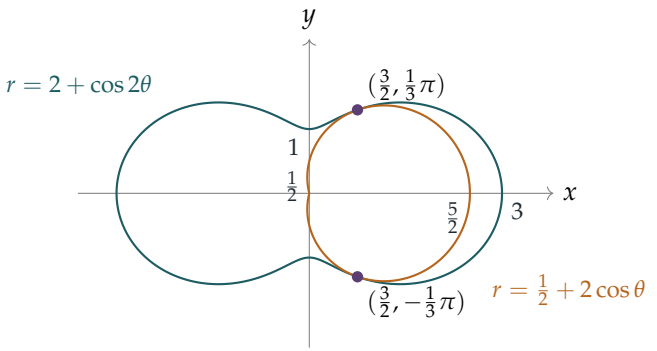
$$h(\theta) = -\left(2c^2 - 2c + \tfrac{1}{2}\right) = -2\left(c - \tfrac{1}{2}\right)^2 \leq 0.$$

이다. 따라서 첫 번째 곡선은 모든 곳에서 두 번째 곡선의 안쪽에 있고, $\cos\theta = \frac{1}{2}$인 곳에서만 두 번째 곡선과 만난다. 두 곡선은

$$\theta = \pm\tfrac{1}{3}\pi, \qquad r = \tfrac{1}{2} + 1 = \tfrac{3}{2}.$$

에서 접한다. (확인: $2 + \cos\frac{2}{3}\pi = \frac{3}{2}$이고, $\theta = \frac{1}{3}\pi$에서 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$의 두 값은 모두 $-\sqrt{3}$이다.)

첫 번째 곡선은 $\cos\theta \geq -\frac{1}{4}$, 곧 $|\theta| \leq \arccos(-\frac{1}{4}) \approx 104.5°$일 때에만 존재한다. 이 곡선은 시초선 위의 $r = \frac{5}{2}$에서 출발하여 $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$에서의 $r = \frac{1}{2}$를 거쳐 O까지 내려간다. 곡선은 직선 $\theta = \pm\arccos(-\frac{1}{4})$를 따라 O에 도달하므로, 원점에서 y축 바로 왼쪽에 모서리(뾰족한 끝)를 가진다.

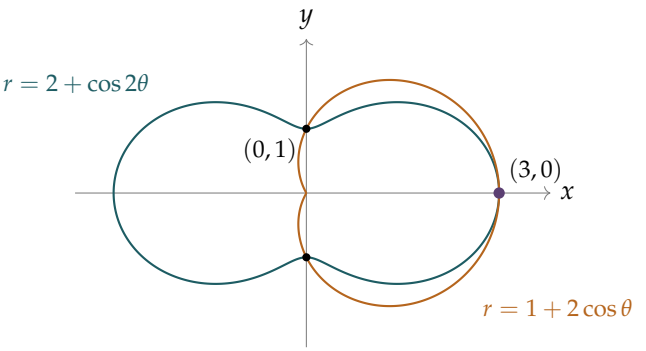


소문항 (iii)

$a = 1$인 경우. 이때 $h(\theta) = -(2c^2 - 2c) = 2c(1 - c)$이다. 두 곡선은 $c = 1$ 또는 $c = 0$인 곳에서 만난다.

- 두 곡선은 $\theta = 0$, $r = 3$, 곧 점 $(3, 0)$에서 접한다. $\theta = 0$ 근처에서는 $0 < c < 1$이므로 $h > 0$이고, 첫 번째 곡선은 접점의 양쪽 모두에서 두 번째 곡선의 바로 바깥쪽에 있다.
- $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$에서는 두 곡선 모두 $r = 1$이다. 이는 점 $(0, \pm 1)$, 곧 오목한 홈의 바닥이다. 여기서 h는 c와 함께 부호가 바뀌므로 두 곡선은 **교차한다**. 첫 번째 곡선은 $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$에서 바깥쪽에, $|\theta| > \frac{1}{2}\pi$에서 안쪽에 있다.

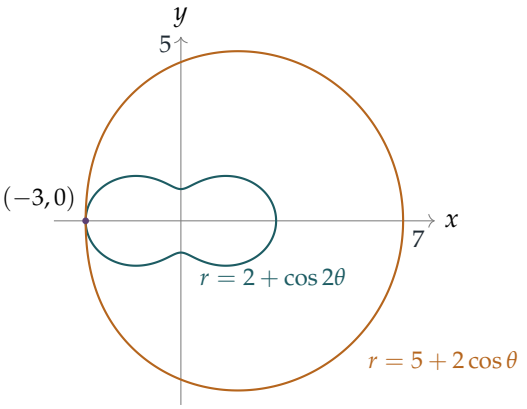
첫 번째 곡선은 $\cos\theta \geq -\frac{1}{2}$, 곧 $|\theta| \leq \frac{2}{3}\pi$일 때 존재한다. 이 곡선은 직선 $\theta = \pm\frac{2}{3}\pi$를 따라 O에 도달하며, 그곳에서 모서리를 만든다.



$a = 5$인 경우. 이때 $h(\theta) = -(2c^2 - 2c - 4) = 2(2 - c)(1 + c) \geq 0$이고, 등호는 $c = -1$일 때에만 성립한다. 따라서 첫 번째 곡선은 전부 두 번째 곡선의 바깥쪽에 있고,

$$\theta = \pi, \qquad r = 3,$$

곧 점 $(-3, 0)$에서만 두 번째 곡선과 접한다. $a > 2$이므로 이제 모든 곳에서 $r > 0$이고, 첫 번째 곡선은 닫힌 고리가 된다($a \geq 4$이므로 오목한 홈이 없는 리마송(limaçon)이다). 이 곡선은 $\theta = 0$에서 $r = 7$, $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$에서 $r = 5$, $\theta = \pi$에서 $r = 3$이다.



검산

- 각 접점에서 r의 두 값과 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$의 두 값을 비교한다. $a = 1, \theta = 0$에서는 두 곡선 모두 $r = 3$이고 두 도함수 값은 모두 0이다. $a = 5, \theta = \pi$에서도 마찬가지이다.
- $-3 \leq a < 9$ 범위를 0.01 간격으로 컴퓨터로 조사한 결과, ($r \geq 0$이면서) $h = h' = 0$인 경우는 $a = \frac{1}{2}, 1, 5$일 때뿐이었다. 이는 인수분해 $h' = 2\sin\theta(2\cos\theta - 1)$과 일치한다.
- 점 $(0, 1)$은 두 번째 곡선 위에 있고, 그 근처의 $\theta = \frac{1}{2}\pi + 0.1$인 점은 $y \approx 1.015 > 1$이다. 이로써 오목한 홈이 확인된다.

흔한 실수

- 판별식에서 멈추어 $a = 1$과 $a = 5$를 놓치는 것. $c = \cos\theta$에 대한 단순근이라도 θ에 대해서는 중근일 수 있다.
- $r = 2 + \cos 2\theta$를 타원으로 그리거나, $(0, \pm 1)$에서 매끄러운 오목한 홈 대신 첨점을 그리는 것.
- $a = \frac{1}{2}$ 또는 $a = 1$일 때 리마송의 안쪽 고리를 그리는 것. 그 고리에서는 $r < 0$인데, 문제에서 이를 제외하고 있다.

STEP 너머

접한다는 것은 사실 중복도(multiplicity)에 관한 명제이다. 두 곡선은 두 방정식의 차가 곡선을 따라 중복된 영점을 가지는 곳에서 접하며, 여기서 $\cos\theta$가 그랬듯이 매개화(parametrisation)는 그런 영점을 만들어 내기도 하고 숨기기도 한다. 곡선에 대한 첫 강의에서 이는 접촉 차수(order of contact)라는 개념이 되고, 극곡선의 곡률(curvature) $\left(r^2 + 2r'^2 - rr''\right) / \left(r^2 + r'^2\right)^{3/2}$은 $2 + \cos 2\theta$의 오목한 홈이 정확히 어디에서 생기는지 설명해 준다. 매개화된 곡선과 그 기하학에 대해 더 알고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)를, 매끄러움과 접함의 바탕에 있는 해석학에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 읽어 보자.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.