풀이

STEP III 2021, 문제 4

순수수학 • 벡터와 정사영

> **STEP III 2021, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

여기서는 모든 것을 스칼라곱(scalar product)으로 처리한다. 두 벡터 사이의 각은 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos$(각)에서 읽어 내고, 정사영(projection)은 선형(linear)이므로 $\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$의 정사영은 $\frac{1}{2}(\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1)$이다. 소문항 (i)에서는 **길이가 같은** 두 벡터의 평균이 두 벡터 사이의 각을 이등분(bisect)함을 보인다. 소문항 (iii)에서 정사영 $\mathbf{a}_1$과 $\mathbf{b}_1$은 대개 길이가 다르므로, 특별한 일이 일어나지 않는 한 이등분이 성립하지 않으리라고 예상해야 한다. 조건은 깔끔하게 인수분해(factorise)되어 두 가지 특별한 경우로 나뉜다.

풀이

소문항 (i)

$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$이고 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \cos\theta$이므로

$$|\mathbf{m}|^2 = \tfrac{1}{4}\left(1+2\cos\theta+1\right) = \tfrac{1}{2}(1+\cos\theta) = \cos^2\tfrac{\theta}{2},$$

따라서 $|\mathbf{m}| = \cos\frac{\theta}{2}$이고, $0<\theta<\pi$이므로 이 값은 양수이다. 특히 $\mathbf{m}\neq\mathbf{0}$이다. 또한

$$\mathbf{m}\cdot\mathbf{a} = \tfrac{1}{2}(1+\cos\theta) = \cos^2\tfrac{\theta}{2} = \mathbf{m}\cdot\mathbf{b}.$$

그러므로 $\mathbf{m}$과 $\mathbf{a}$ 사이의 각의 코사인은 $\cos^2\frac{\theta}{2}/\cos\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2}$이고, $\mathbf{b}$에 대해서도 마찬가지이다. 따라서 두 각은 모두 $\frac{\theta}{2}$이다. $\mathbf{m}$은 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 이루는 평면 위에 있고 두 각의 합이 θ이므로, $\mathbf{m}$은 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$ 사이의 각을 이등분한다.

소문항 (ii)

$\mathbf{c}$가 단위 법선벡터(unit normal)이고 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = \cos\alpha$이므로, 정의에 의해

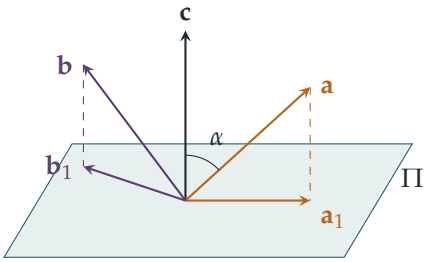
$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a} - \cos\alpha\,\mathbf{c}, \qquad \mathbf{b}_1 = \mathbf{b} - \cos\beta\,\mathbf{c}.$$

그러면 $|\mathbf{c}| = 1$이므로 $\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{c} = \cos\alpha - \cos\alpha\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}) = 0$이다. 마찬가지로 $\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{c} = 0$이다.

$\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{c} = 0$이므로 $|\mathbf{a}_1|^2 = \mathbf{a}_1\cdot(\mathbf{a} - \cos\alpha\,\mathbf{c}) = \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}$를 얻고,

$$\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} - \cos\alpha\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}) = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha.$$

α가 예각(acute angle)이므로 $\sin\alpha > 0$이고, 따라서 $|\mathbf{a}_1| = \sin\alpha$이다. 같은 방법으로 $|\mathbf{b}_1| = \sin\beta$이다. 둘 다 0이 아니므로 각 ϕ가 정의된다.



정사영 사이의 각을 구할 때도 다시 $\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{c} = 0$을 이용하여 한 항을 없앤다.

$$\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1\cdot(\mathbf{b} - \cos\beta\,\mathbf{c}) = \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \cos\alpha\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}) = \cos\theta - \cos\alpha\cos\beta.$$

이를 $|\mathbf{a}_1||\mathbf{b}_1| = \sin\alpha\sin\beta$로 나누면

$$\cos\phi = \frac{\cos\theta - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

를 얻으며, 이것이 보이려던 식이다.

소문항 (iii)

정사영은 선형이므로

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{m} - (\mathbf{m}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{c} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} - \cos\alpha\,\mathbf{c}) + \tfrac{1}{2}(\mathbf{b} - \cos\beta\,\mathbf{c}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1).$$

$\mathbf{m}_1 \neq \mathbf{0}$이라고 가정한다. 그렇지 않으면 방향이 없으므로 아무것도 이등분할 수 없기 때문이다. $\mathbf{m}_1$은 $\mathbf{a}_1$과 $\mathbf{b}_1$의 양의 계수 결합이므로 두 벡터가 이루는 평면 위에, 두 벡터 사이에 놓인다. 따라서 이 벡터가 각을 이등분하는 것은 $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$과 같은 크기의 각을 이룰 때, 그리고 그때에만이다.

$$\frac{\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|} = \frac{\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|}.$$

(공통인수 $|\mathbf{m}_1|$을 약분하였고, cos는 $[0,\pi]$에서 일대일(one-to-one)이다.)

? 생각해 보기 왜 그냥 $\mathbf{a}_1$과 $\mathbf{b}_1$에 소문항 (i)을 적용하지 않는가?

소문항 (i)에는 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$가 필요했다. 여기서는 $|\mathbf{a}_1| = \sin\alpha$이고 $|\mathbf{b}_1| = \sin\beta$인데, 이 둘은 대개 다르다. 그러므로 직접 계산해야 한다.

$P = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1$, $s = \sin\alpha$, $t = \sin\beta$라 하자. 그러면

$$\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = \tfrac{1}{2}(s^2 + P), \qquad \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = \tfrac{1}{2}(P + t^2).$$

양변에 $2st > 0$을 곱하면 조건은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} t(s^2 + P) = s(t^2 + P) &\iff st(s-t) - P(s-t) = 0 \\ &\iff (s-t)(st - P) = 0. \end{aligned}$$

따라서 $\mathbf{m}_1$이 각을 이등분할 필요충분조건은 $s = t$ 또는 $P = st$이다.

- $s = t$는 $\sin\alpha = \sin\beta$를 뜻한다. sin은 $(0, \frac{\pi}{2})$에서 순증가하고 두 각이 모두 예각이므로, 이는 $\alpha = \beta$와 동치이다.
- 소문항 (ii)에 의해 $P = \cos\theta - \cos\alpha\cos\beta$이다. 따라서 $P = st$는 다음을 뜻한다.

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta).$$

각 단계가 동치(equivalence)였으므로, $\mathbf{m}_1$이 $\mathbf{a}_1$과 $\mathbf{b}_1$ 사이의 각을 이등분할 필요충분조건은 $\alpha = \beta$ 또는 $\cos\theta = \cos(\alpha - \beta)$이다.

기하학적으로 보면, 첫 번째 경우는 $\mathbf{a}_1$과 $\mathbf{b}_1$의 길이가 같다는 뜻이므로 결국 소문항 (i)이 적용된다. 두 번째 경우는 $\cos\phi = 1$, 즉 두 정사영이 같은 방향을 가리킨다는 뜻이다($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$가 한 평면 위에 있고(coplanar) $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 $\mathbf{c}$의 같은 쪽에 있을 때). 이때 각은 0이 되어 자명하게 이등분된다.

검산

- $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$로 놓아 보자(여기서는 허용되지 않지만 유용한 극한이다). 그러면 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$는 이미 평면 위에 있고, 공식은 당연히 그래야 하듯 $\cos\phi = \cos\theta$를 준다.
- $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$이면 공식은 $\cos\phi = -\frac{\sqrt{2}/4}{\sqrt{6}/4} = -1/\sqrt{3} \approx -0.577$을 준다. 이는 벡터를 직접 구성하여 얻은 결과와 일치한다.
- $\cos\phi$에 대한 공식과 인수분해된 이등분 조건 모두, 단위벡터 세 개를 무작위로 고른 수천 개의 경우에 대해 컴퓨터로 확인하였다.

흔한 실수

- $|\mathbf{a}_1| \neq 1$임을 잊는 것. 단위벡터의 정사영은 단위벡터가 아니므로 분모 $\sin\alpha \sin\beta$가 반드시 필요하다.
- $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1$의 이등분선이 항상 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1$이라고 가정하는 것. 이는 길이가 같을 때에만 성립한다. 일반적으로 이등분선은 $\mathbf{a}_1/|\mathbf{a}_1| + \mathbf{b}_1/|\mathbf{b}_1|$이다.
- 인수분해하지 않고 $\sin\alpha - \sin\beta$로 나누어, $\alpha = \beta$인 경우를 놓치는 것.

STEP 너머

평면으로의 정사영은 **선형사상**(linear map) $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$이며, 그 행렬은 $I - \mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T}$이다. 선형사상은 합은 보존하지만 길이나 각은 보존하지 않으며, 이 문제가 이렇게 풀리는 것도 그 때문이다. $\cos\phi$에 대한 공식은 사실 구면 코사인 법칙(spherical cosine rule)이 모습을 바꾼 것이다. 여기서 ϕ는 꼭짓점이 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$이고 변이 α, β, θ인 구면삼각형(spherical triangle)의 꼭짓점 $\mathbf{c}$에서의 각이다. 정사영과 직교성(orthogonality)에 대해서는 Strang, *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.