풀이

STEP III 2021, 문제 3

순수수학 • 적분 부등식

> **STEP III 2021, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

n제곱되는 대상을 미분한다. $u = \sec x + \tan x$의 도함수(derivative)는 $u \sec x$이므로 $u^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$는 정확히 적분할 수 있다. 따라서 할 일은 $I_{n+1} + I_{n-1}$의 피적분함수(integrand)를 이 꼴로 다시 쓰는 것이다. 부등식(inequality)은 피적분함수 $u^n = u^{n-1} \cdot u$를 정확히 적분할 수 있는 $u^{n-1} \cdot u'$과 비교하여 얻는다. $u < u'$이면 적분값은 $[u^n/n]$보다 작다.

풀이

소문항 (i)

$u = \sec x + \tan x$라 하자. 그러면

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \sec x \tan x + \sec^2 x = \sec x \left(\sec x + \tan x\right) = u \sec x.$$

또한 $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$를 이용하면

$$u^2 + 1 = \sec^2 x + 2 \sec x \tan x + \tan^2 x + 1 = 2\sec^2 x + 2 \sec x \tan x = 2u \sec x = 2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

따라서 $n \geq 1$일 때

$$\begin{aligned} I_{n+1} + I_{n-1} &= \int_0^\beta u^{n-1}\left(u^2+1\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^\beta u^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n}\Big[u^n\Big]_0^\beta \\ &= \frac{2}{n}\left((\sec\beta + \tan\beta)^n - 1\right), \end{aligned}$$

이다. 여기서 $x = 0$일 때 $u = 1$임을 이용하였다. 양변을 반으로 나누면 구하는 항등식(identity)을 얻는다.

생각해 보기 항등식에는 I_{n+1}과 I_{n-1}이 나오지만, 부등식은 I_n에 관한 것이다. 가운데 항을 어떻게 끼워 넣을 수 있을까?

u^2+1과 $2u$를 비교한다. $u^2+1-2u=(u-1)^2\geq 0$이고, $0<x\leq\beta$에서 $\sec x>1$, $\tan x>0$이므로 $u>1$이 되어 그 구간에서 부등식은 엄격하다. 양변에 $u^{n-1}>0$을 곱하면 $(0,\beta]$에서 $u^{n+1}+u^{n-1}>2u^n$이고, 이를 적분하면(피적분함수는 연속이고 길이가 양수인 구간에서 부등식이 엄격하므로)

$$I_{n+1}+I_{n-1}>2I_n, \qquad \text{따라서} \qquad I_n<\tfrac{1}{2}\left(I_{n+1}+I_{n-1}\right)=\frac{1}{n}\left((\sec\beta+\tan\beta)^n-1\right).$$

(같은 말이지만, $x>0$일 때 $u'-u=u(\sec x-1)>0$이므로 $I_n=\int_0^\beta u^{n-1}u\,\mathrm{d}x<\int_0^\beta u^{n-1}u'\,\mathrm{d}x$이다. 소문항 (ii)로 그대로 이어지는 것은 바로 이 관점이다.)

소문항 (ii)

$c=\cos\beta$라 쓰면 $0<c<1$이다. $v=c\sec x+\tan x$라 하자. 그러면

$$v'=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=c\sec x\tan x+\sec^2 x.$$

양 끝점에서 $v(0)=c=\cos\beta$, $v(\beta)=1+\tan\beta$인데, 이는 정확히 목표식에 나오는 두 수이다. 따라서 상계는 $\frac{1}{n}[v^n]_0^\beta=\int_0^\beta v^{n-1}v'\,\mathrm{d}x$이고, $[0,\beta]$ 전체에서 $v<v'$임을 보이면 충분하다.

생각해 보기 소문항 (i)에서 u^2+1은 정확히 $2u'$이었다. v에 대해서는 이에 대응하는 관계가 무엇인가?

소문항 (i)의 계산을 반복하면

$$v^2+1=c^2\sec^2x+2c\sec x\tan x+\tan^2x+1=(1+c^2)\sec^2x+2c\sec x\tan x,$$

이므로

$$2v'-(v^2+1)=(1-c^2)\sec^2x=\sin^2\beta\,\sec^2x.$$

이제는 등식이 아니지만, 남는 항이 양수이다. $v^2+1-2v=(v-1)^2$과 결합하면

$$2(v'-v)=(v-1)^2+\sin^2\beta\,\sec^2x>0,$$

이다. $0<\beta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\beta\neq 0$이기 때문이다. 따라서 모든 $x\in[0,\beta]$에 대하여 $v<v'$이다.

마지막으로 $[0,\beta]$에서 $v>0$이므로($c>0$, $\sec x>0$, $\tan x\geq 0$이므로) $v^{n-1}>0$이고 $v^n=v^{n-1}v<v^{n-1}v'$이다. $[0,\beta]$에서 적분하면 $n\geq 1$일 때

$$J_n=\int_0^\beta v^n\,\mathrm{d}x<\int_0^\beta v^{n-1}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\Big[v^n\Big]_0^\beta=\frac{1}{n}\left((1+\tan\beta)^n-\cos^n\beta\right),$$

이므로 증명이 끝난다.

검산

- $n = 1$일 때 (i)의 항등식은 $\frac{1}{2}(I_2 + \beta) = \sec\beta + \tan\beta - 1$이다. $\beta = 1$에 대해 수치 적분을 하면 양변 모두 2.40822…이다.
- $\beta = 1, n = 3$일 때: 수치적으로 $I_3 \approx 8.774$이고 상계는 12.863이며, $J_3 \approx 3.326$이고 상계는 5.523이다.
- (ii)에 형식적으로 $\cos\beta = 1$을 넣으면 J_n은 I_n이 되고 남는 항 $\sin^2\beta\sec^2 x$는 사라진다. 소문항 (ii)는 실제로 소문항 (i)의 섭동(perturbation)이다.

흔한 실수

- 양수임을 확인하지 않는 것: $v < v'$에 v^{n-1}을 곱하려면 $v^{n-1} > 0$이어야 한다. $v > 0$이 중요한 이유가 이것이다.
- $\leq$만 주장하는 것: 엄격한 부등식을 얻으려면 한 점에서가 아니라 어떤 구간에서 $u > 1$(또는 $\sin\beta \neq 0$)이어야 한다.
- $v(\beta)$를 부주의하게 계산하는 것: $\sec\beta\cos\beta = 1$이며, $1 + \tan\beta$는 바로 여기서 나온다.

STEP 너머

"모든 점에서 $0 < f \leq g$이고 어딘가에서 엄격한 부등식이 성립하면 $\int f < \int g$이다"라는 논증은 적분의 단조성(monotonicity)이며, 해석학(analysis) 강의에서는 이를 리만 적분(Riemann integral)의 정의로부터 엄밀하게 증명한다. 다루기 까다로운 피적분함수를 정확한 도함수와 비교하는 것은 적분과 합의 범위를 구하는 표준적인 방법이며, 적분 판정법(integral test) 같은 추정에서도 다시 등장한다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해)는 적분과 이러한 비교 논증을 엄밀하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.