풀이

STEP III 2021, 문제 2

순수수학 • 행렬식과 부등식

> **STEP III 2021, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

x, y, z의 각 정의에서 분모를 없애면 a, b, c에 대한 **일차**(linear) 방정식을 얻는다. 이러한 세 방정식은 영이 아닌 해 (a, b, c)를 갖는 동차 연립일차방정식(homogeneous linear system)을 이루므로, 계수행렬은 특이행렬(singular matrix)이어야 한다. 즉 그 행렬식(determinant)은 0이다. 이 행렬식이 바로 우리가 원하는 x, y, z에 대한 대칭식이다. 그 다음 부등식들은 목표하는 식을 x, y, z로 다시 쓰고, 제곱의 합에 관한 기본적인 사실과 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)을 이용하면 얻어진다.

풀이

소문항 (i)

a, b, c가 서로 다르므로 분모는 어느 것도 0이 아니다. 분모를 없애면

$$x(b-c) = a, \qquad y(c-a) = b, \qquad z(a-b) = c.$$

이제 행렬의 곱을 행별로 전개하면

$$\begin{aligned} a - xb + xc &= a - x(b-c) = a - a = 0, \\ ya + b - yc &= b - y(c-a) = b - b = 0, \\ -za + zb + c &= c - z(a-b) = c - c = 0, \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하는 행렬 방정식이다.

이 3×3 행렬을 M이라 하자. a, b, c가 서로 다르므로 이들이 모두 0일 수는 없고, 따라서 M은 **영이 아닌** 벡터를 영벡터로 보낸다.

? **생각해 보기** 왜 이로부터 $\det M = 0$이 되어야 하는가?

만약 $\det M \neq 0$이면 M^{-1}이 존재하고, $M\mathbf{v} = \mathbf{0}$의 양변 왼쪽에 M^{-1}을 곱하면 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$이 되어 $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$에 모순이다. 따라서 $\det M = 0$이다. 첫째 행을 따라 전개하면

$$\begin{aligned}\det M &= 1 \cdot (1 + yz) + x(y - yz) + x(yz + z) \\ &= 1 + yz + xy - xyz + xyz + xz \\ &= 1 + xy + yz + zx.\end{aligned}$$

이 값을 0으로 놓으면 $yz + zx + xy = -1$을 얻는다.

부등식에서 좌변은 $x^2 + y^2 + z^2$이다. 항등식 $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$를 이용하면

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2 + 2 \geq 2,$$

이다. 실수 $x + y + z$의 제곱은 음이 아니기 때문이다. 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (ii)

여기서는 분모가 양수이고, 분모를 없애면 $x(b + c) = 2a$ 등을 얻는다. 이를 a, b, c에 대한 일차방정식으로 정리하면

$$\begin{pmatrix} -2 & x & x \\ y & -2 & y \\ z & z & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(첫째 행은 $-2a + x(b + c) = 0$이고, 나머지도 마찬가지이다.) $a, b, c > 0$이므로 이 벡터는 영벡터가 아니고, 따라서 소문항 (i)과 똑같이 행렬식은 0이 된다.

$$\begin{aligned}0 &= -2(4 - yz) - x(-2y - yz) + x(yz + 2z) \\ &= -8 + 2yz + 2xy + xyz + xyz + 2xz \\ &= -8 + 2(xy + yz + zx) + 2xyz.\end{aligned}$$

양변을 2로 나누면 $xyz + yz + zx + xy = 4$를 얻는다.

첫째 부등식. 요령은 좌변의 각 괄호를 우변의 대응하는 괄호로 나누는 것이다.

$$\frac{2a + b + c}{b + c} = \frac{2a}{b + c} + 1 = 1 + x,$$

나머지 둘도 마찬가지이다. $(b + c)(c + a)(a + b) > 0$이므로 이 부등식은 $(1 + x)(1 + y)(1 + z) > 5$와 동치이다. 전개하고 방금 증명한 결과를 이용하면

$$(1 + x)(1 + y)(1 + z) = 1 + (x + y + z) + (xy + yz + zx) + xyz = 5 + (x + y + z).$$

x, y, z가 모두 양수이므로 이 값은 5보다 크고, 이로써 첫째 부등식이 증명된다.

둘째 부등식. 같은 계산에 의해 이제 $x+y+z>2$를 보이면 된다. $S=x+y+z$라 하자.

> **생각해 보기** $xy+yz+zx+xyz=4$임을 알고 있다. 이로부터 어떻게 S가 충분히 크다는 것을 끌어낼 수 있을까?

$xy+yz+zx$와 xyz는 둘 다 S로 위로 유계이다.

- $S^2-3(xy+yz+zx)=\frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]\geq 0$이므로 $xy+yz+zx\leq \frac{1}{3}S^2$이다.
- 양수 x, y, z에 대한 산술-기하 평균 부등식에 의해 $xyz\leq\left(\frac{1}{3}S\right)^3=\frac{1}{27}S^3$이다.

두 식을 더하면

$$4=xy+yz+zx+xyz\leq\tfrac{1}{3}S^2+\tfrac{1}{27}S^3.$$

우변은 $S>0$에서 S에 대한 증가함수(increasing function)이고, $S=3$일 때 $3+1=4$이다. 따라서 $S<3$이면 우변이 4보다 작아지는데, 이는 불가능하다. 그러므로 $S\geq 3$이고

$$\frac{(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)}{(b+c)(c+a)(a+b)}=5+S\geq 8>7,$$

이다. 이로써 둘째 부등식이 증명된다(실제로는 더 강한 하계 8을 얻으며, 이는 $a=b=c$일 때 등호가 성립한다).

검산

- 소문항 (ii)에서 $a=b=c=1$로 두자. 좌변은 $4^3=64$이고 $(b+c)(c+a)(a+b)=8$이므로 비는 8이며, 이는 $x=y=z=1$, $S=3$일 때의 $5+S$와 일치한다. 또한 $xyz+xy+yz+zx=1+3=4$이다.
- 소문항 (i)에서 $(a,b,c)=(0,1,2)$로 두자. 그러면 $x=0, y=\frac{1}{2}, z=-2$이고, 요구대로 $xy+yz+zx=-1$이다. 제곱의 합은 $\frac{17}{4}\geq 2$이다.
- 무작위로 고른 유리수 세 쌍 20 000개에 대해 컴퓨터로 확인한 결과 두 항등식이 정확히 성립하였다. 소문항 (ii)에서 찾은 가장 작은 비는 약 8.0001이었고, $a=b=1$, $c=10^{-6}$일 때는 약 9.0이므로, 하계 8은 실제 최솟값이며 7보다 넉넉히 크다.

흔한 실수

- 이유를 말하지 않고 $\det M=0$이라고 주장하는 것. 핵심은 (a,b,c)가 **영이 아닌** 벡터라는 점이며, 이를 위해 소문항 (i)에서는 "서로 다르다"는 조건이, 소문항 (ii)에서는 "양수"라는 조건이 필요하다.

- $2a+b+c$를 $b+c$로 나누어 $1+x$ 대신 $1+\frac{1}{2}x$를 얻는 것. x에는 이미 인수 2가 들어 있음을 기억하라.
- $xy+yz+zx<4$(상계(upper bound))를 이용해 S를 아래로 유계시키려 하는 것. 위에서처럼 부등식의 방향이 반대여야 한다.

STEP 너머

정사각행렬이 영이 아닌 벡터를 영벡터로 보내는 것은 그 행렬식이 0일 때, 그리고 그때에만 일어난다는 사실은 선형대수학(linear algebra)의 핵심이다. 고윳값(eigenvalue)을 $\det(A-\lambda I)=0$을 통해 구하는 것도 바로 이 사실 덕분이다. 소문항 (ii)의 하계 $S\geq 3$은 사실 네스빗 부등식(Nesbitt's inequality) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$를 변장한 것이다. 선형대수학에 대해서는 Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)를 보라. 이런 종류의 부등식을 더 연습하려면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)가 훌륭한 연습서이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.