풀이

STEP III 2021, 문제 10

역학 • 감기는 줄의 운동

STEP III 2021, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

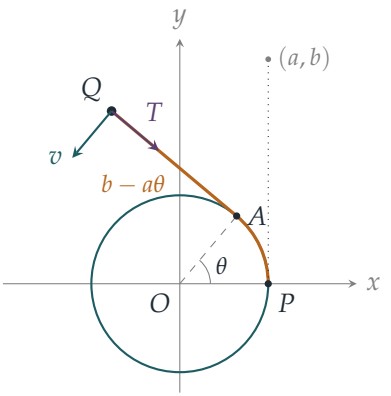
핵심 아이디어

줄의 곧은 부분이 회전한 각 θ로 모든 것을 나타낸다. 줄은 원기둥에서 접선(tangent)을 따라 떨어져 나가므로, 입자는 접점에 길이가 $b - a\theta$인 접선 벡터를 더한 위치에 있다. 미분해 보면 입자의 속도는 항상 줄과 수직이므로, 장력(tension)은 일을 하지 않고 속력은 변하지 않는다. 매 순간 입자는 줄이 원기둥에서 떨어져 나가는 점을 중심으로 하는 원 위를 움직이고 있으며, 장력이 구심력(centripetal force)을 제공한다.

풀이

입자를 매끄러운 수평 탁자 위를 움직이는 점으로 모형화한다. 따라서 입자에 작용하는 수평 방향의 힘은 가볍고 늘어나지 않는 줄의 장력 T뿐이다(무게는 탁자의 수직항력(normal reaction)과 평형을 이룬다). 줄은 운동하는 내내 팽팽하다.

줄이 원기둥에 감기려면 충격량(impulse)이 입자를 (a, b)에서 x축의 음의 방향으로 보내야 하므로, 줄은 시계 반대 방향으로 돈다. 시각 t에서 줄의 곧은 부분이 원기둥에서 떨어져 나가는 점을 A라 하자.



소문항 (i)

P로 향하는 반지름이 θ만큼 회전했으므로 점 A는 $(a\cos\theta, a\sin\theta)$이다. 원기둥에 감긴 줄의 길이는 호 PA의 길이 $a\theta$이므로, 곧은 부분의 길이는 $b - a\theta$이다. 곧은 부분은 A에서의 접선을 따라 θ가 증가하는 방향으로 놓이며, 이 방향의 단위벡터는 $(-\sin\theta, \cos\theta)$이다. ($\theta = 0$일 때 이는 $(0,1)$이 되어 처음 위치 (a,b)와 일치한다.) 따라서 입자의 위치는

$$x = a\cos\theta - (b - a\theta)\sin\theta, \qquad y = a\sin\theta + (b - a\theta)\cos\theta.$$

곱의 미분법(product rule)과 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(b - a\theta) = -a\dot{\theta}$를 이용하여 t에 대하여 미분하면

$$\dot{x} = -a\dot{\theta}\sin\theta + a\dot{\theta}\sin\theta - (b - a\theta)\dot{\theta}\cos\theta = -(b - a\theta)\dot{\theta}\cos\theta,$$
$$\dot{y} = a\dot{\theta}\cos\theta - a\dot{\theta}\cos\theta - (b - a\theta)\dot{\theta}\sin\theta = -(b - a\theta)\dot{\theta}\sin\theta.$$

따라서 $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (b - a\theta)^2\dot{\theta}^2$이고, $b - a\theta > 0$이며 $\dot{\theta} > 0$(줄이 감기고 있다)이므로 속력은

$$v = (b - a\theta)\dot{\theta}.$$

소문항 (ii)

> **생각해 보기** 왜 속력이 u로 유지되어야 할까? 줄은 내내 입자를 당기고 있는데 말이다.

소문항 (i)에서 속도는 $-(b - a\theta)\dot{\theta}\,(\cos\theta, \sin\theta)$이며, 이는 반지름 OA와 평행하므로 방향이 $(-\sin\theta, \cos\theta)$인 줄과 수직이다. 장력은 줄을 따라 작용하므로 장력이 일을 하는 비율 $\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}$는 매 순간 0이다. 다른 수평 방향의 힘은 작용하지 않으므로 운동 에너지(kinetic energy), 따라서 속력은 일정하다. 처음 속력이 u이므로

$$\dot{\theta}\,(b - a\theta) = u,$$

이고, 이것이 보이려던 식이다.

소문항 (iii)

(ii)를 이용하면 속도는 $\mathbf{v} = -u(\cos\theta, \sin\theta)$이고 u는 상수이므로, 가속도는

$$\dot{\mathbf{v}} = -u\dot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta).$$

이 가속도의 크기는 $u\dot{\theta}$이고, 입자에서 A를 향하여 정확히 줄을 따라 놓인다. (같은 말로, 매 순간 입자는 A를 중심으로 하는 반지름 $b - a\theta$인 원 위를 속력 u로 움직이므로, 그 가속도는 A를 향하는 $u^2/(b - a\theta)$이다.) 줄 방향으로 뉴턴(Newton)의 운동 제2법칙을 적용하면

$$T = mu\dot{\theta} = \frac{mu^2}{b - a\theta}.$$

이제 $b - a\theta$를 t로 나타내기만 하면 된다. $t = 0$일 때 $\theta = 0$임을 이용하여 (ii)를 t에 대하여 적분하면

$$b\theta - \tfrac{1}{2}a\theta^2 = ut.$$

그러면

$$(b - a\theta)^2 = b^2 - 2a\left(b\theta - \tfrac{1}{2}a\theta^2\right) = b^2 - 2aut,$$

이고, $b - a\theta > 0$이므로 양의 제곱근을 택하여 $b - a\theta = \sqrt{b^2 - 2aut}$이다. 따라서

$$T = \frac{mu^2}{\sqrt{b^2 - 2aut}},$$

이고, 이것이 보이려던 식이다.

검산

- $t = 0$일 때 장력은 mu^2/b이다. 예상대로 입자는 P를 중심으로 하는 반지름 b인 원 위를 속력 u로 움직이기 시작한다.
- 줄은 $a\theta = b$일 때 완전히 감기며, 이는 $t = b^2/(2au)$일 때 일어난다. 이때 $b^2 - 2aut = 0$이 되어 장력은 한없이 커지는데, 속력은 일정한 채로 순간 원의 반지름이 0으로 줄어들기 때문이다.
- 차원(dimensions): b^2과 aut는 모두 넓이이고, mu^2/길이는 힘이다.
- 컴퓨터로도 결과를 확인하였다. a, b, u, m을 여러 번 무작위로 골라 운동을 수치적으로 단계별 계산하고 위치를 수치 미분한 결과, 속력은 u로 유지되었고 줄 방향으로 측정한 힘은 상대오차 약 3×10^{-5} 이내에서 $mu^2/\sqrt{b^2 - 2aut}$와 일치하였다.

흔한 실수

- O에 대한 각운동량(angular momentum)이 보존된다고 가정하는 것. 그렇지 않다. 장력은 원기둥의 접선을 따라 작용하는데, 이 접선은 O를 지나지 않으므로 장력은 O에 대

한 모멘트(moment)를 가진다. 여기서 보존되는 양은 에너지이다.

- 이미 원기둥에 감긴 줄을 잊고, 곧은 부분의 길이로 $b - a\theta$ 대신 b를 쓰는 것.
- 장력을 계산할 때 곡률 반지름(radius of curvature)으로 곧은 부분의 길이 AQ 대신 입자 경로의 반지름 OQ를 쓰는 것.

STEP 너머

곡선에서 풀려나는(또는 곡선에 감기는) 줄의 끝이 그리는 경로를 **신개선**(*involute*)이라 한다. 원의 신개선은 대부분의 톱니바퀴 이 모양에 쓰이는데, 맞물린 톱니바퀴가 운동을 매끄럽게 전달하게 해 주기 때문이다. 이 문제는 대학 1학년 역학에서 만나는 일반 원리도 보여 준다. 속도에 수직인 구속력(constraint force)은 일을 하지 않으므로, 운동량(momentum)과 각운동량이 보존되지 않을 때에도 에너지는 보존될 수 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에 바로 이런 종류의 문제에 대한 좋은 논의가 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.