풀이

STEP III 2021, 문제 1

순수수학 • 매개변수 곡선의 법선

> **STEP III 2021, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

두 소문항 모두 같은 방법을 따른다. 매개변수방정식(parametric equations)을 미분하고, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$의 음의 역수를 취해 법선(normal)의 기울기(gradient)를 구한 다음, 방정식을 정리한다. 진짜 재미있는 부분은 바로 이 정리 과정이다. 양변에 적당한 식을 곱해 분수를 없애면, 삼각함수 항들이 짧고 대칭적인 직선의 방정식으로 줄어든다. 직선이 $x\sin\phi + y\cos\phi = \ldots$ 또는 $x\cos\phi + y\sin\phi = \ldots$ 꼴이 되면, 그 기하학적 성질(절편(intercept), 원점까지의 거리)을 한눈에 읽어 낼 수 있다.

풀이

소문항 (i)

t에 대하여 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 12\cos^2 t\,\sin t, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 12\cos t - 12\sin^2 t\cos t = 12\cos t\,(1-\sin^2 t) = 12\cos^3 t.$$

따라서 $0 < t < \frac{1}{2}\pi$에서($\sin t$와 $\cos t$가 0이 아닌 범위)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{12\cos^3 t}{12\cos^2 t\sin t} = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

$t = \phi$에서 접선(tangent)의 기울기는 $\cot\phi$이므로, 법선의 기울기는 $-\tan\phi = -\dfrac{\sin\phi}{\cos\phi}$이다. 그러므로 법선은

$$y - 12\sin\phi + 4\sin^3\phi = -\frac{\sin\phi}{\cos\phi}(x + 4\cos^3\phi).$$

양변에 $\cos\phi$를 곱하고 x와 y가 포함된 항을 좌변으로 모으면

$$\begin{aligned} x\sin\phi + y\cos\phi &= 12\sin\phi\cos\phi - 4\sin^3\phi\cos\phi - 4\cos^3\phi\sin\phi \\ &= 12\sin\phi\cos\phi - 4\sin\phi\cos\phi\,(\sin^2\phi + \cos^2\phi) \\ &= 8\sin\phi\cos\phi. \end{aligned}$$

따라서 법선은

$$\boxed{x\sin\phi + y\cos\phi = 8\sin\phi\cos\phi} \qquad \text{또는 동치로} \qquad \frac{x}{\cos\phi} + \frac{y}{\sin\phi} = 8.$$

두 번째 꼴을 보면 법선이 좌표축과 $(8\cos\phi, 0)$과 $(0, 8\sin\phi)$에서 만남을 알 수 있다.

접함(tangency). $P = (8\cos^3\phi,\ 8\sin^3\phi)$라 하자. 세 가지를 보여야 한다.

P는 곡선 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ 위에 있다. $0 < \phi < \frac{1}{2}\pi$이므로 두 좌표는 모두 양수이고, 따라서 실수 세제곱근은 $2\cos\phi$와 $2\sin\phi$이다. 그러므로 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4\cos^2\phi + 4\sin^2\phi = 4$이다.

P는 법선 위에 있다. 대입하면

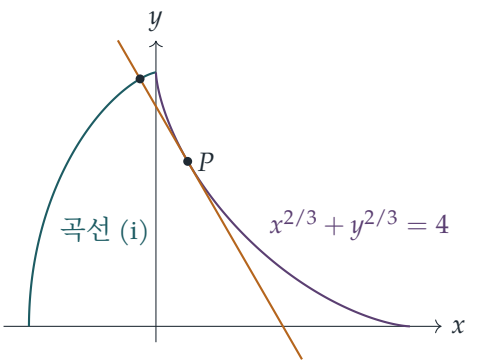
$$8\cos^3\phi\sin\phi + 8\sin^3\phi\cos\phi = 8\sin\phi\cos\phi\,(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = 8\sin\phi\cos\phi.$$

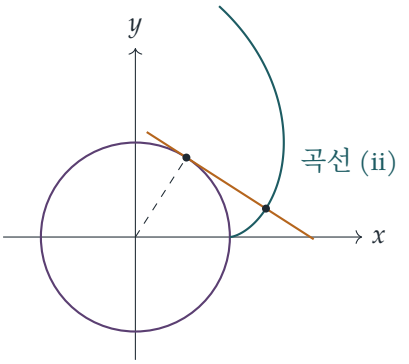
P에서 기울기가 일치한다. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$를 음함수 미분(implicit differentiation)하면($x, y > 0$에서 성립)

$$\tfrac{2}{3}x^{-1/3} + \tfrac{2}{3}y^{-1/3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}} = -\frac{2\sin\phi}{2\cos\phi} = -\tan\phi \ \text{ 점}P,$$

에서의 이 값은 정확히 법선의 기울기와 같다.

곡선 위의 한 점을 지나고 그 점에서 곡선과 같은 기울기를 갖는 직선은 그 점에서의 접선이다. 따라서 법선은 점 P에서 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$에 접하는 접선이며, 이로써 증명이 끝난다.





각 그림에서 곡선(청록색) 위의 한 점에서 그은 법선(호박색)이 두 번째 곡선(자주색)에 접한다. 두 그림 모두 ϕ의 특정한 한 값에 대해 그린 것이다.

소문항 (ii)

t에 대하여 미분하면($t\sin t$와 $t\cos t$ 항에는 곱의 미분법(product rule)을 쓴다)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sin t + \sin t + t\cos t = t\cos t, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t.$$

$0 < t < \frac{1}{2}\pi$에서 $t\cos t \neq 0$이므로 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{t\sin t}{t\cos t} = \tan t$이다. $t = \phi$에서 법선의 기울기는 $-\cot\phi = -\dfrac{\cos\phi}{\sin\phi}$이고, 그 방정식은

$$y - \sin\phi + \phi\cos\phi = -\frac{\cos\phi}{\sin\phi}(x - \cos\phi - \phi\sin\phi).$$

양변에 $\sin\phi$를 곱하면

$$y\sin\phi - \sin^2\phi + \phi\sin\phi\cos\phi = -x\cos\phi + \cos^2\phi + \phi\sin\phi\cos\phi.$$

$\phi\sin\phi\cos\phi$ 항은 소거되고 $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$이므로, 남는 식은

$$\boxed{x\cos\phi + y\sin\phi = 1}.$$

생각해 보기 수선의 발(foot of the perpendicular)을 구하지 않고 원점에서 직선까지의 거리를 어떻게 구할 수 있을까?

점 (x_0, y_0)에서 직선 $ax + by = c$까지의 거리는 $\dfrac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$이다. 여기서 $(x_0, y_0) = (0,0)$, $a = \cos\phi$, $b = \sin\phi$, $c = 1$이므로 거리는

$$\frac{|-1|}{\sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi}} = 1.$$

이는 직접 확인할 수도 있다. $(\cos\phi, \sin\phi)$는 직선에 수직인 단위벡터(unit vector)이고, 점 $(\cos\phi, \sin\phi)$ 자체가 방정식을 만족한다. 따라서 O에서 내린 수선의 발은 $(\cos\phi, \sin\phi)$이고, 거리는 1이다.

곡선. ϕ의 값에 관계없이 모든 법선은 원점으로부터 거리가 1이다. O로부터 거리가 1인 직선은 O를 중심으로 하는 반지름 1인 원과 수선의 발에서만 만나고, 그 점에서 반지름과 수직이다. 그러므로 이 직선은 원의 접선이다. 따라서 모든 법선은

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1},$$

에 접하며, 접점은 $(\cos\phi, \sin\phi)$이다.

검산

- (i)에서 $\phi = \frac{1}{3}\pi$로 두자. 곡선 위의 점은 $(-\frac{1}{2},\ 6\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3}) = (-0.5,\ 7.794)$이고, 법선 $2x + \frac{2}{\sqrt{3}}y = 8$은 좌표축과 $(4, 0)$과 $(0, 4\sqrt{3}) \approx (0, 6.928)$에서 만난다. 점 $P = (1,\ 3\sqrt{3}) \approx (1,\ 5.196)$은 $2 + 6 = 8$을 만족하므로 법선 위에 있고, $1^{2/3} + (3\sqrt{3})^{2/3} = 1 + 3 = 4$이다.
- (ii)에서 $\phi \to 0$일 때 곡선은 단위원 위의 점 $(1, 0)$에서 시작하고, 그 점에서의 법선은 수직선 $x = 1$에 가까워지는데, 이는 실제로 $x^2 + y^2 = 1$의 접선이다.
- 무작위로 고른 ϕ의 값 천 개에 대해 컴퓨터로 확인한 결과, 모든 법선의 방정식, (i)의 접함, (ii)의 단위 거리가 반올림 오차 범위 안에서 성립했다.

흔한 실수

- (i)에서 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$를 잘못 구하는 것: $12\cos t - 12\sin^2 t \cos t$는 $12\cos^3 t$로 간단해지며, 이 인수분해 덕분에 기울기가 이렇게 간단해진다.
- (i)에서 P가 법선 위에 있다는 것만 확인하는 것. 곡선 위의 한 점을 지나는 직선이 자동으로 그 점에서의 접선이 되는 것은 아니다. 기울기도 일치해야 한다.
- (ii)에서 방정식, 중심, 반지름을 밝히지 않고 "원"이라고만 답하는 것.

STEP 너머

곡선의 모든 법선의 포락선(envelope)을 그 곡선의 **축폐선**(*evolute*)이라 한다. 축폐선은 곡률 중심(centre of curvature)의 자취이다. 따라서 소문항 (i)은 아스트로이드(astroid) $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$가 첫 번째 곡선의 축폐선임을 보여 준다. (ii)의 곡선은 단위원의 **신개선**(*involute*)(실패에서 팽팽하게 풀려 나오는 실의 끝이 그리는 경로)이며, 그 축폐선은 원이다. 원의 신개선은 대부분의 톱니바퀴 이의 모양을 이룬다. 이러한 개념들은 곡선의 미분기하학(differential geometry)에 속한다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 평면곡선에 대한 이런 종류의 추론을 아름답게 기하학적으로 다루는 좋은 길잡이이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.