풀이

STEP II 2021, 문제 9

역학 • 정역학

STEP II 2021, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

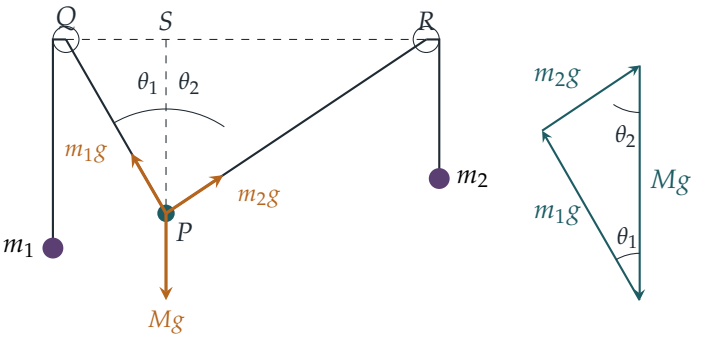
www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

도르래(pulley)가 매끄러우므로 각 줄의 장력(tension)은 그 줄 반대쪽 끝에 매달린 입자의 무게와 같다. 따라서 P에 작용하는 세 힘의 크기의 비는 $m_1 : m_2 : M$이다. 이 세 힘을 이어 붙이면 변의 길이가 $m_1 g$, $m_2 g$, Mg이고 각이 θ_1과 θ_2로 이루어진 삼각형이 닫힌다. 이 삼각형에 코사인 법칙(cosine rule)을 적용하면 모든 것을 얻는다. 부등식은 두 각이 모두 예각(acute)인 삼각형이 존재해야 한다는 조건에서 나오고, 비는 $\tan\theta_1$과 $\tan\theta_2$에서 나온다.

풀이

모형. 입자는 질점(point mass)이고, 줄은 가볍고 늘어나지 않으며(inextensible), 도르래는 작고 매끄럽다. 따라서 PQ의 장력은 m_1을 지탱하는 수직 부분의 장력과 같고, m_1은 평형(equilibrium) 상태이므로 $T_1 = m_1 g$이다. 마찬가지로 PR의 장력은 $T_2 = m_2 g$이다. $h = SP$라 하자.



소문항 (i)

P에서 힘을 수평 방향과 수직 방향으로 분해하면(resolving) (g를 약분하여) 다음을 얻는다.

$$m_1 \sin\theta_1 = m_2 \sin\theta_2, \qquad m_1 \cos\theta_1 + m_2 \cos\theta_2 = M. \tag{$*$}$$

이는 세 힘을 머리와 꼬리를 이어 배치하면 변이 $m_1 g$, $m_2 g$, Mg인 닫힌 삼각형(그림의 오른쪽)이 된다는 것과 같다. 변 Mg는 수직이므로, 변 Mg와 $m_1 g$ 사이의 각은 θ_1($m_2 g$의 대각)이고, Mg와 $m_2 g$ 사이의 각은 θ_2($m_1 g$의 대각)이다. 나머지 한 각, 즉 Mg의 대각은 $180^\circ - \theta_1 - \theta_2$이다.

그림보다 대수를 선호한다면, 같은 사실을 ($*$)에서 바로 얻을 수 있다. $m_1 \cos\theta_1 = M - m_2 \cos\theta_2$와 $m_1 \sin\theta_1 = m_2 \sin\theta_2$로 쓰고 각각 제곱하여 더하면

$$m_1^2 = M^2 + m_2^2 - 2Mm_2 \cos\theta_2, \quad \text{이므로} \quad \cos\theta_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2Mm_2},$$

이고, 두 변의 역할을 바꾸면

$$\cos\theta_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2Mm_1}.$$

(a) $\theta_1 + \theta_2$가 0°와 180° 사이에 엄격하게 놓이므로, 힘의 삼각형(triangle of forces)은 납작하지 않은 진짜 삼각형이다. 따라서 삼각형 부등식(triangle inequality)이 등호 없이 성립하고, $M < m_1 + m_2$를 얻는다.

아래쪽 경계를 위해서는 θ_2가 예각이라는 사실, 즉 $\cos\theta_2 > 0$을 이용한다. $2Mm_2 > 0$이므로 위의 식에서

$$M^2 + m_2^2 - m_1^2 > 0 \iff M^2 > m_1^2 - m_2^2 \iff M > \sqrt{m_1^2 - m_2^2},$$

이고, 마지막 단계는 $M > 0$이고 $m_1^2 - m_2^2 > 0$이므로 타당하다. 둘을 합치면

$$\sqrt{m_1^2 - m_2^2} < M < m_1 + m_2.$$

? **생각해 보기** 왜 θ_1에 대한 조건이 아니라 θ_2에 대한 조건이 중요할까?

삼각형에서 더 긴 변의 대각이 더 크다. $m_1 > m_2$이므로 각 θ_2($m_1 g$의 대각)는 θ_1($m_2 g$의 대각)보다 크다. 따라서 θ_2가 예각이면 θ_1도 저절로 예각이 되며, 실질적인 제약은 θ_2에만 있다. (실제로 $m_1 > m_2$이므로 모든 $M > 0$에 대하여 $\cos\theta_1 > 0$이 성립한다.)

(b) $SP = h$인 직각삼각형 QSP와 RSP에서

$$QS = h\tan\theta_1, \qquad SR = h\tan\theta_2.$$

따라서

$$\begin{aligned} r = \frac{QS}{SR} = \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} &= \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\cdot\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} \\ &= \frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{M^2+m_2^2-m_1^2}{2Mm_2}\cdot\frac{2Mm_1}{M^2+m_1^2-m_2^2} \quad ((*)\text{와 코사인 값을 이용}) \\ &= \frac{M^2-m_1^2+m_2^2}{M^2-m_2^2+m_1^2}, \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하는 비이다. (a)에 의해 두 괄호는 모두 양수이므로 $r>0$이고, $m_1>m_2$이므로 $r<1$이다. 즉 그림에서 보이듯 점 S는 Q에 더 가깝다.

소문항 (ii)

힘의 삼각형의 변 Mg에 대한 코사인 법칙은, 그 대각이 $180^\circ-(\theta_1+\theta_2)$이므로

$$M^2 = m_1^2+m_2^2+2m_1m_2\cos(\theta_1+\theta_2).$$

이다. (대수적으로는 $(*)$의 두 식을 제곱하여 더하면 된다.) $M^2=m_1^2+m_2^2$이면 $\cos(\theta_1+\theta_2)=0$이어야 한다. θ_1과 θ_2가 예각이므로 $0^\circ<\theta_1+\theta_2<180^\circ$이고, 가능한 경우는

$$\theta_1+\theta_2 = 90^\circ.$$

뿐이다. 따라서 줄은 P에서 직각을 이룬다. (이 M의 값은 (a)의 범위 안에 있으므로 이러한 배치가 실제로 존재한다.)

이제 코사인 값이 간단해진다. $\cos\theta_1 = \dfrac{2m_1^2}{2Mm_1} = \dfrac{m_1}{M}$이고 $\cos\theta_2 = \dfrac{m_2}{M}$이다. $\theta_2 = 90^\circ-\theta_1$이므로 $\sin\theta_1=\cos\theta_2=m_2/M$이고, 따라서

$$\tan\theta_1 = \frac{m_2}{m_1}, \qquad \tan\theta_2 = \frac{1}{\tan\theta_1} = \frac{m_1}{m_2}.$$

그러므로

$$\frac{QR}{SP} = \frac{h\tan\theta_1+h\tan\theta_2}{h} = \frac{m_2}{m_1}+\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_1^2+m_2^2}{m_1m_2},$$

즉 $QR:SP=(m_1^2+m_2^2):m_1m_2$이다.

검산

- $m_1=5$, $m_2=3$, $M=6$($4<M<8$의 범위 안)일 때 $(*)$를 수치적으로 풀면 $\theta_1\approx 29.93^\circ$, $\theta_2\approx 56.25^\circ$이다. 그러면 $\tan\theta_1/\tan\theta_2\approx 0.3846=\frac{5}{13}$이고, 이는 $r=\frac{36-25+9}{36-9+25}=\frac{20}{52}$와 일치한다.
- 범위의 양 끝에서: $M\to\sqrt{m_1^2-m_2^2}$이면 $\theta_2\to 90^\circ$이고 $r\to 0$이다(줄 PR이 수평이 된다). $M\to m_1+m_2$이면 두 각이 모두 0으로 가고 P는 QR 아래로 한없이 내려간다.

- $m_1 = 4$, $m_2 = 3$, $M = 5$인 소문항 (ii): $\tan\theta_1 = \frac{3}{4}$, $\tan\theta_2 = \frac{4}{3}$이고 $QR/SP = \frac{25}{12}$이다. $(*)$를 확인하면 $4 \cdot \frac{3}{5} = 3 \cdot \frac{4}{5}$이고 $4 \cdot \frac{4}{5} + 3 \cdot \frac{3}{5} = 5$이다.

흔한 실수

- 힘의 삼각형에서 Mg의 대각을 $180^\circ - (\theta_1 + \theta_2)$가 아니라 $\theta_1 + \theta_2$로 잡는 것. 그러면 코사인 법칙의 부호가 뒤바뀐다.
- 등호가 포함된 삼각형 부등식을 쓰거나, 아래쪽 경계에 각이 예각이라는 조건이 필요하다는 것을 잊는 것.
- 비를 뒤집는 것: $r = QS/SR$이고, QS는 더 무거운 입자 쪽의 변이다.

STEP 너머

힘의 삼각형은 더 일반적인 사실의 가장 간단한 경우이다. 평형 상태의 힘들은 합이 영벡터이므로, 머리와 꼬리를 이어 그리면 닫힌 다각형을 이룬다. 공학자들은 이 아이디어("힘 다각형(force polygon)")를 이용하여 골조 구조를 해석하며, 대학 1학년 역학에서는 모멘트(moment)도 평형을 이루어야 한다는 조건과 함께 정역학(statics)의 벡터 형태로 다시 등장한다. 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.