풀이

STEP II 2021, 문제 8

순수수학 • 적분의 점화식

> **STEP II 2021, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 2.9 절 *e*에 다가가는 분수들에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch02/e-approximations.html

핵심 아이디어

함수 $t^n(1-t)^n$은 하나의 이차식 $u = t(1-t)$의 거듭제곱이므로, 이를 미분하는 것은 연쇄법칙(chain rule)을 두 번 쓰는 것에 불과하다. 이 함수와 그 1계 도함수(derivative)는 모두 $t = 0$과 $t = 1$에서 0이 되므로, e^t에 대해 부분적분(integration by parts)을 두 번 하면 경계항(boundary term)이 모두 사라지고, 소문항 (i)의 2계 도함수가 곧바로 점화식(recurrence)으로 바뀐다. 이 적분들은 0과 아주 작은 값 사이에 끼어 있으며, 이 때문에 e는 분수 $-a_n/b_n$으로 매우 잘 근사된다.

풀이

소문항 (i)

$u = t(1-t) = t - t^2$이라 하면 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 1 - 2t$, $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = -2$이고,

$$(1-2t)^2 = 1 - 4t + 4t^2 = 1 - 4u.$$

$f(t) = t^n(1-t)^n = u^n$이라 하면, 연쇄법칙에 의해 $f'(t) = nu^{n-1}(1-2t)$이다. 곱의 미분법(product rule)으로 한 번 더 미분하면 ($n \geq 2$일 때 성립하며, 이때 u^{n-2}는 다항식이다)

$$\begin{aligned} f''(t) &= n(n-1)u^{n-2}(1-2t)^2 - 2nu^{n-1} \\ &= nu^{n-2}\big[(n-1)(1-4u) - 2u\big] \\ &= nu^{n-2}\big[(n-1) - (4n-2)u\big] \\ &= nt^{n-2}(1-t)^{n-2}\big[(n-1) - 2(2n-1)t(1-t)\big], \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (ii)

$n \geq 2$에 대하여 계속 $f(t) = t^n(1-t)^n$으로 두면 $n!\,T_n = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$이다. 매번 다항식 쪽을 미분하고 e^t를 적분하는 방식으로 부분적분을 두 번 하면

$$\int_0^1 f\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \Big[f\,\mathrm{e}^t\Big]_0^1 - \Big[f'\,\mathrm{e}^t\Big]_0^1 + \int_0^1 f''\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

? 생각해 보기 두 경계항이 모두 사라지는 이유는 무엇인가?

$f(t) = u^n$과 $f'(t) = nu^{n-1}(1-2t)$가 모두 인수 $u = t(1-t)$를 포함하고(여기서 $n \geq 2$, 즉 $n-1 \geq 1$임을 이용한다), $t = 0$과 $t = 1$에서 $u = 0$이기 때문이다. 따라서

$$n!\,T_n = \int_0^1 f''(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

이제 소문항 (i)의 결과를 $f'' = n(n-1)u^{n-2} - 2n(2n-1)u^{n-1}$ 꼴로 써서 대입하면

$$\begin{aligned} n!\,T_n &= n(n-1)\int_0^1 u^{n-2}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t - 2n(2n-1)\int_0^1 u^{n-1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= n(n-1)\,(n-2)!\,T_{n-2} - 2n(2n-1)\,(n-1)!\,T_{n-1} \\ &= n!\,T_{n-2} - 2(2n-1)\,n!\,T_{n-1}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\int_0^1 u^k\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = k!\,T_k$를 이용하였다. 양변을 $n!$로 나누면

$$T_n = T_{n-2} - 2(2n-1)T_{n-1} \qquad (n \geq 2),$$

이므로 증명이 끝난다.

소문항 (iii)

먼저 $T_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - 1$이다.

$T_1 = \int_0^1 (t-t^2)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$에 대해서는, 미분하여 $\int t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (t-1)\mathrm{e}^t$와 $\int t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (t^2-2t+2)\mathrm{e}^t$임을 확인할 수 있으므로

$$\int_0^1 (t-t^2)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \Big[(-t^2+3t-3)\mathrm{e}^t\Big]_0^1 = -\mathrm{e} + 3,$$

즉 $T_1 = 3 - \mathrm{e}$이다.

따라서 $T_0 = a_0 + b_0\mathrm{e}$에서 $(a_0, b_0) = (-1, 1)$이고, $T_1 = a_1 + b_1\mathrm{e}$에서 $(a_1, b_1) = (3, -1)$이며, 이들은 모두 정수이다. 어떤 $n \geq 2$에 대하여 T_{n-2}와 T_{n-1}이 정수 계수를 갖는 이 꼴로 쓰인다고 가정하자. 소문항 (ii)에 의해

$$T_n = \big(a_{n-2} - 2(2n-1)a_{n-1}\big) + \big(b_{n-2} - 2(2n-1)b_{n-1}\big)\mathrm{e},$$

이고, $2(2n-1)$이 정수이므로 두 괄호 안의 값은 모두 정수이다. (강한) 수학적 귀납법(induction)에 의해, $n \geq 0$인 모든 T_n은 $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$인 $a_n + b_n\mathrm{e}$ 꼴로 쓸 수 있다.

소문항 (iv)

범위. $0 < t < 1$이면 $0 < t(1-t) \leq \frac{1}{4} < 1$이므로 $0 < t^n(1-t)^n \leq 1$이고, 또한 $0 < \mathrm{e}^t < \mathrm{e}$이다. 따라서 열린구간 $(0, 1)$에서

$$0 < \frac{t^n(1-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t < \frac{\mathrm{e}}{n!}.$$

피적분함수(integrand)가 연속이므로, 이 엄격한 부등식을 (길이가 1인 구간) $[0, 1]$에서 적분해도 엄격한 부등식이 유지된다.

$$0 < T_n < \frac{\mathrm{e}}{n!} \qquad (n \geq 0).$$

($n = 0$이면 왼쪽 인수는 그냥 1이고, 엄격한 부등식은 $\mathrm{e}^t < \mathrm{e}$에서 나온다.)

극한. $b_n \neq 0$이므로 $T_n = a_n + b_n\mathrm{e}$를 b_n으로 나누면

$$-\frac{a_n}{b_n} - \mathrm{e} = -\frac{T_n}{b_n}, \qquad \text{이므로} \qquad \left|-\frac{a_n}{b_n} - \mathrm{e}\right| = \frac{T_n}{|b_n|} \leq T_n < \frac{\mathrm{e}}{n!}.$$

여기서 b_n이 0이 아닌 **정수**이므로 $|b_n| \geq 1$임을 이용하였다. $n \to \infty$일 때 $\mathrm{e}/n! \to 0$이므로 $-a_n/b_n \to \mathrm{e}$이다.

사실 이 범위는 매우 넉넉하다. 점화식으로부터 $(a_2, b_2) = (-19, 7)$, $(a_3, b_3) = (193, -71)$이고, 이로부터 근삿값 $\frac{19}{7} \approx 2.714$와 $\frac{193}{71} \approx 2.71831$을 얻는데, $\mathrm{e} \approx 2.71828$과 비교해 보라.

검산

- 소문항 (i)에 $n = 2$를 대입하면, $t^2(1-t)^2 = t^2 - 2t^3 + t^4$의 2계 도함수는 $2 - 12t + 12t^2$이고, 공식으로는 $2\big[1 - 6t(1-t)\big] = 2 - 12t + 12t^2$을 얻는다.
- $T_1 = 3 - \mathrm{e} \approx 0.2817$은 양수이고 $\mathrm{e}/1!$보다 작으므로, 소문항 (iv)의 결과와 맞는다. 또 $T_2 = T_0 - 6T_1 = 7\mathrm{e} - 19 \approx 0.0280$이며, 컴퓨터로 적분값을 계산하여 이 값과 함께 n이 11까지일 때의 점화식과 범위를 확인할 수 있다.

- $n = 4, 5, 6$일 때 $-a_n/b_n$의 값은 $\frac{2721}{1001}$, $\frac{49171}{18089}$, $\frac{1084483}{398959}$이며, e와의 차이는 각각 약 10^{-7}, 3×10^{-10}, 5×10^{-13}이다. 이는 $e/n!$만으로 예상되는 것보다 훨씬 빠르다.

흔한 실수

- 경계항이 사라지는 이유를 밝히지 않거나, 이를 위해 $n \geq 2$가 필요하다는 점을 놓치는 것. $n = 1$이면 도함수 $1 - 2t$는 양 끝점에서 0이 아니다.
- 소문항 (iv)에서 $|b_n| \geq 1$ 없이 $b_n \neq 0$만 이용하는 것. 0이 아닌 실수는 아주 작을 수도 있다. T_n/b_n이 한없이 커지지 않게 막아 주는 것은 b_n이 정수라는 사실이다.

STEP 너머

이것은 e가 무리수(irrational)이며 나아가 초월수(transcendental)임을 증명한 에르미트(Hermite)의 1873년 방법의 핵심이다. 즉 0은 아니지만 0으로 수렴하는 정수 결합 $a_n + b_n e$를 만드는 것이다. 만약 $e = p/q$라면 $q(a_n + b_n e) = qa_n + b_n p$는 $qe/n!$보다 작은 양의 정수가 되는데, 이는 n이 클 때 불가능하다. 같은 다항식 $t^n(1-t)^n$은 $\zeta(3)$이 무리수임을 보인 Beukers의 유명한 증명에도 등장한다. 수가 분수로 얼마나 잘 근사될 수 있는지에 대해 더 알고 싶다면 Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 정수론)을 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.