풀이

STEP II 2021, 문제 7

순수수학 • 회전 행렬

> **STEP II 2021, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

2×2 회전행렬(rotation matrix)은 모양이 매우 엄격하게 정해져 있다. 즉 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ 꼴이므로 각 열이 단위벡터(unit vector)이다. $\mathbf{R}+\mathbf{I}$도 이 모양을 유지하도록 요구하면 ϕ가 완전히 결정된다. $\mathbf{S}^3=\mathbf{I}$인 일반적인 행렬에 대해서는 (곱셈적인) 행렬식(determinant)과 관계식 $\mathbf{S}^2=(a+d)\mathbf{S}-\mathbf{I}$가 유용한 도구이다. 이 관계식을 이용하면 $\mathbf{S}$의 임의의 거듭제곱을 $\mathbf{S}$와 $\mathbf{I}$의 일차결합으로 나타낼 수 있다.

풀이

소문항 (i)

$c=\cos\phi, s=\sin\phi$라 하면

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix}c & -s\\ s & c\end{pmatrix},\qquad \mathbf{R}+\mathbf{I}=\begin{pmatrix}1+c & -s\\ s & 1+c\end{pmatrix}.$$

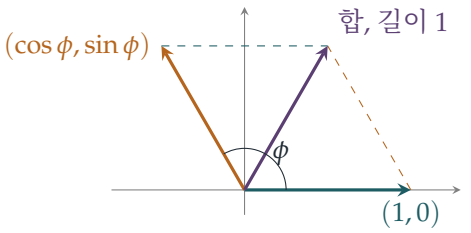
이 행렬은 이미 $\begin{pmatrix}p & -q\\ q & p\end{pmatrix}$ 꼴이고, 이러한 행렬은 $p^2+q^2=1$일 때 그리고 그때에만 회전이다(이때 어떤 θ에 대해 $(p,q)=(\cos\theta,\sin\theta)$이다). 따라서

$$(1+c)^2+s^2=1 \iff 2+2c=1 \iff \cos\phi=-\tfrac{1}{2}.$$

이어야 한다. $0^\circ\le\phi<360^\circ$이므로 $\phi=120^\circ$ 또는 $\phi=240^\circ$이다.

기하학적으로 보면, $\mathbf{R}+\mathbf{I}$의 첫째 열은 단위벡터 $(1,0)$과 $(\cos\phi,\sin\phi)$의 합이고, 이 합 역시 단위벡터여야 한다. 즉 세 벡터가 정삼각형(equilateral triangle)을 이루며, 그림은

$\phi = 120°$인 경우이다.



어느 경우든 $\mathbf{R}^3$은 3ϕ만큼의 회전이고, 이는 $360°$ 또는 $720°$로 정수 바퀴의 회전이다. 따라서 $\mathbf{R}^3 = \mathbf{I}$이다.

소문항 (ii)

행렬식. det는 곱셈적이므로 $(\det \mathbf{S})^3 = \det(\mathbf{S}^3) = \det \mathbf{I} = 1$이다. 행렬이 실행렬이므로 $\det \mathbf{S}$는 세제곱이 1인 실수이고, 그러한 수는 1뿐이다. 따라서 $\det \mathbf{S} = ad - bc = 1$이다.

이차 관계식. 곱을 전개하면

$$\mathbf{S}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & bc + d^2 \end{pmatrix}, \qquad (a+d)\mathbf{S} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} a^2 + ad - 1 & ab + bd \\ ac + dc & ad + d^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

비대각성분(off-diagonal entries)은 서로 같고, 대각성분(diagonal entries)은 $bc = ad - 1$(즉 $\det \mathbf{S} = 1$)이므로 서로 같다. 따라서 요구한 대로 $\mathbf{S}^2 = (a+d)\mathbf{S} - \mathbf{I}$이다.

대각합. $t = a + d$라 하자. 관계식에 $\mathbf{S}$를 곱하고 관계식을 한 번 더 이용하면

$$\mathbf{S}^3 = t\mathbf{S}^2 - \mathbf{S} = t(t\mathbf{S} - \mathbf{I}) - \mathbf{S} = (t^2 - 1)\mathbf{S} - t\mathbf{I}.$$

$\mathbf{S}^3 = \mathbf{I}$로 놓으면

$$(t^2 - 1)\mathbf{S} = (t+1)\mathbf{I}.$$

? **생각해 보기** 그냥 $t^2 - 1$로 나누고 끝내도 될까?

조심하지 않으면 안 된다. $t^2 - 1 = 0$인 경우를 따로 살펴보아야 하며, 실제로 일어나는 것이 바로 이 경우이다.

- $t^2 \neq 1$이면 실수 k에 대해 $\mathbf{S} = \dfrac{t+1}{t^2-1}\mathbf{I} = k\mathbf{I}$이다. 그러면 $\mathbf{S}^3 = k^3\mathbf{I} = \mathbf{I}$에서 $k^3 = 1$이어야 하므로 $k = 1$이고 $\mathbf{S} = \mathbf{I}$인데, 이는 제외된 경우이다.
- 따라서 $t^2 = 1$이다. 식은 $\mathbf{0} = (t+1)\mathbf{I}$가 되므로 $t = -1$이다($t = 1$이면 $2\mathbf{I} = \mathbf{0}$이 되어 거짓이다).

그러므로 대각합(trace) $a + d = -1$이다.

소문항 (iii)

먼저 $\mathbf{S} \neq \mathbf{I}$이다. 그렇지 않으면 $\mathbf{S}+\mathbf{I} = 2\mathbf{I}$인데, 이 행렬은 행렬식이 4이고 길이를 두 배로 늘리므로 회전이 아니다. 따라서 소문항 (ii)를 적용할 수 있고, $a+d=-1$이다.

$\mathbf{S}+\mathbf{I}$가 회전이므로, 그 회전각을 θ라 하면

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{pmatrix}.$$

대각합 조건에서 $2\cos\theta - 2 = -1$이므로 $\cos\theta = \frac{1}{2}$이고 $\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 그러면

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\sin\theta \\ \sin\theta & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

이 행렬은 회전 꼴이고 $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2\theta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$이다. 따라서 $\mathbf{S}$는 코사인이 $-\frac{1}{2}$이고 사인이 $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$인 회전이다.

회전각은 $120°$($\theta = 60°$일 때) 또는 $240°$($\theta = 300°$일 때)이다. 두 경우 모두 실제로 일어난다. 소문항 (i)에 의해 이 두 회전 각각에 대해 $\mathbf{S}+\mathbf{I}$는 회전이고 $\mathbf{S}^3 = \mathbf{I}$이기 때문이다. (같은 말이지만, $\mathbf{S}$가 회전임을 알고 나면 소문항 (i) 자체가 가능한 각을 모두 알려 준다.)

검산

- $\phi = 120°$이면 $\mathbf{R}+\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$이고, 이는 $60°$만큼의 회전이다. $\phi = 240°$이면 $300°$만큼의 회전이다.
- 행렬 $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$은 $\mathbf{S}^3 = \mathbf{I}$를 만족하지만 (직접 곱해 보라) 회전이 아니다. 그래도 소문항 (ii)가 예측하는 대로 행렬식은 1, 대각합은 -1이다. 이 행렬의 $\mathbf{S}+\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$은 회전이 아니며, 이는 소문항 (iii)과 일치한다.
- $\mathbf{S}^3 = \mathbf{I}, \mathbf{S} \neq \mathbf{I}$인 무작위 실행렬을 컴퓨터로 많이 확인해 본 결과, 매번 행렬식 1, 대각합 -1, 그리고 $\mathbf{S}^2$에 대한 관계식이 성립함을 확인했다. 소문항 (iii)에서 θ를 훑어본 결과 $\theta = 60°, 300°$만 나왔다.

흔한 실수

- $t^2 - 1$이 0이 될 수 있는지 확인하지 않고 나누는 것. $t^2 = 1$인 경우가 바로 답이다.
- 소문항 (iii)에서 소문항 (ii)를 쓰기 전에 $\mathbf{S} \neq \mathbf{I}$임을 먼저 보여야 한다는 것을 잊는 것.

- $\det(\mathbf{S}+\mathbf{I}) = 1$이면 $\mathbf{S}+\mathbf{I}$가 회전이 된다고 생각하는 것. 여기서는 이 조건이 저절로 성립하므로 아무 정보도 주지 않는다.

STEP 너머

관계식 $\mathbf{S}^2 = (a+d)\mathbf{S} - (\det \mathbf{S})\mathbf{I}$는 케일리-해밀턴 정리(Cayley–Hamilton theorem)의 2×2인 경우이다. 이 정리는 모든 정사각행렬이 자기 자신의 특성다항식(characteristic polynomial)을 만족한다는 것이다. 소문항 (ii)는 위수(order)가 3인 실 2×2 행렬의 고윳값(eigenvalue)이 실수가 아닌 두 개의 1의 세제곱근(cube roots of unity)이라는 것을 말해 주며, 이러한 행렬은 항상 120°만큼의 회전과 **닮음**(similar)이지만, 반드시 그 회전과 같은 것은 아니다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)에서 고윳값과 닮음을 자세히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.