풀이

STEP II 2021, 문제 6

순수수학 • 원 기하의 근사

> **STEP II 2021, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 일은 하나의 삼각형 안에서 일어난다. 바로 A, 도로의 중심 O, 그리고 자전거 타는 사람이 그리는 원의 중심 O'이 이루는 삼각형이다. 대칭성 때문에 O'은 O를 지나면서 $\angle AOB$를 이등분하는 직선 위에 놓이고, 접한다는 조건이 거리 OO'을 결정한다. 그러면 이 삼각형에서 코사인법칙(cosine rule)과 사인법칙(sine rule)을 쓰면 d와 $\alpha - \theta$를 구할 수 있다. 마지막 소문항에서 **1보다 훨씬 작다**는 말은 w/R에 대한 1차(first-order) 항까지만 남기고 작은 각 근사(small-angle approximation)를 쓴다는 뜻이다.

풀이

O를 원점으로 하고 대칭축(line of symmetry)이 수직이 되도록 잡으면 $A = (-(R+w)\sin\alpha,\ (R+w)\cos\alpha)$이고 B는 그 거울상이다. r을 O로부터의 거리라 할 때, 도로는 $R \le r \le R+w$인 영역이다.

소문항 (i)

현(chord) AB 위에서 O에 가장 가까운 점은 그 중점 M이다. 삼각형 OAB가 이등변삼각형(isosceles triangle)이므로 $OM \perp AB$이기 때문이다. 그러면

$$OM = (R+w)\cos\alpha \le \tfrac{1}{2}(R+w) < \tfrac{1}{2}(R+R) = R,$$

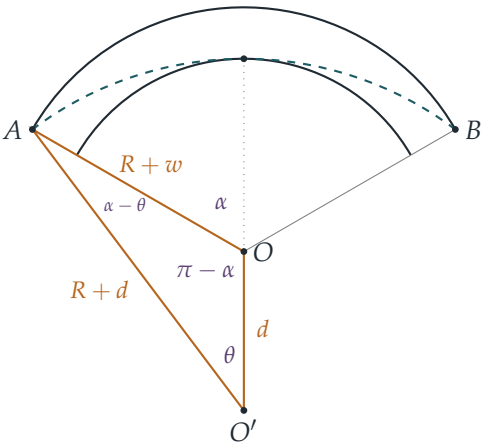
이다. 여기서 먼저 $\cos\alpha \le \frac{1}{2}$($\frac{1}{3}\pi \le \alpha \le \frac{1}{2}\pi$이므로)를, 그다음 $w < R$을 썼다. 따라서 M은 안쪽 원의 내부, 즉 도로 바깥에 있다. A에서 B까지 직선으로 달리면 반드시 M을 지나므로, 도로 위에 머무를 수 없다.

소문항 (ii)

O'은 어디에 있는가? 원이 A와 B를 지나므로 그 중심은 두 점에서 같은 거리에 있고, 따라서 AB의 수직이등분선(perpendicular bisector), 곧 O를 지나는 대칭축 위에 있다. 이 원은 안쪽 원에 접하고 안쪽 원보다 크므로($R + d > R$), 안쪽 원은 이 원의 내부에 놓여 내접(internally tangent)한다. 내접하는 두 원에서 중심 사이의 거리는 반지름의 차이다.

$$OO' = (R + d) - R = d.$$

경로는 바깥쪽, 즉 도로 쪽으로 볼록하므로, 그림처럼 O'은 O를 기준으로 도로의 반대편에 있다. 그러면 삼각형 AOO'에서 $OA = R + w$, $OO' = d$, $O'A = R + d$이고, O에서의 각은 $\pi - \alpha$이다($\angle AOM = \alpha$의 보각(supplementary angle)이다). O'에서의 각은 $\frac{1}{2}\angle AO'B = \theta$이므로, A에서의 각은 $\pi - (\pi - \alpha) - \theta = \alpha - \theta$이다.



(a) 삼각형 AOO'에서 $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$를 이용해 코사인법칙을 쓰면

$$\begin{aligned}(R + d)^2 &= (R + w)^2 + d^2 + 2(R + w)d\cos\alpha \\ R^2 + 2Rd &= R^2 + 2Rw + w^2 + 2(R + w)d\cos\alpha \\ 2d\big(R - (R + w)\cos\alpha\big) &= w(2R + w),\end{aligned}$$

이므로

$$d = \frac{w(2R + w)}{2\big(R - (R + w)\cos\alpha\big)}.$$

분모의 괄호는 소문항 (i)에 의해 양수이므로, 이것은 타당한 양의 길이이다.

(b) 같은 삼각형에서 각 $\alpha-\theta(OO'=d$의 대각)와 각 $\pi-\alpha(O'A=R+d$의 대각)를 짝지어 사인법칙을 쓰면

$$\frac{\sin(\alpha-\theta)}{d}=\frac{\sin(\pi-\alpha)}{R+d}\quad\Longrightarrow\quad\sin(\alpha-\theta)=\frac{d\sin\alpha}{R+d}.$$

소문항 (iii)

$\varepsilon=w/R$이라 하면 $0<\varepsilon\ll 1$이다. (a)의 결과를 R로 나누면

$$\frac{d}{R}=\frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{2\big(1-(1+\varepsilon)\cos\alpha\big)}.$$

$\cos\alpha\le\frac{1}{2}$이므로 분모는 적어도 $2\big(1-\frac{1}{2}(1+\varepsilon)\big)=1-\varepsilon$이고, 따라서

$$0<\frac{d}{R}\le\frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{1-\varepsilon}\approx 2\varepsilon,$$

이며, 이는 1보다 훨씬 작다. (1차까지 보면 $d/R\approx\varepsilon/(1-\cos\alpha)$이다.)

> **?** **생각해 보기** 사인 값이 작다는 것만으로는 각이 0에 가깝다는 것 또는 π에 가깝다는 것밖에 알 수 없다. 어느 쪽인가?

(b)에서 $0<\sin(\alpha-\theta)=\dfrac{(d/R)\sin\alpha}{1+d/R}<\dfrac{d}{R}$이고, 이는 작다. 각 $\alpha-\theta$는 삼각형 AOO'의 한 각이므로 양수이고, $\theta>0$이므로 $\alpha\le\frac{1}{2}\pi$보다 작다. $(0,\frac{1}{2}\pi)$에서 사인함수는 증가하고 $\sin x\ge\frac{2}{\pi}x$이므로 $\alpha-\theta\le\frac{\pi}{2}\sin(\alpha-\theta)<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{d}{R}$이고, 이 역시 1보다 훨씬 작다.

소문항 (iv)

내 친구는 바깥쪽 가장자리를 따라 달린다. 이 경로는 반지름이 $R+w$이고 O에서 2α의 중심각을 이루는 호이므로, 그 길이는 $L=2\alpha(R+w)$이다. 내 경로는 AB를 기준으로 O'의 반대편에 있는 반지름 $R+d$인 호이고, O'에서 2θ의 중심각을 이루므로 그 길이는 $2\theta(R+d)$이다. 따라서

$$\begin{aligned}S&=2\alpha(R+w)-2\theta(R+d)\\&=2(R+d)(\alpha-\theta)+2\alpha(R+w)-2\alpha(R+d)\\&=2(R+d)(\alpha-\theta)+2\alpha(w-d),\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 식이다($2\alpha(R+d)$를 더하고 뺐다).

근사. 이제 ε에 대해 1차까지 계산하고, 남기는 항에 비해 ε^2 차수인 항은 무시한다. (iii)에 의해 $\alpha-\theta$는 작으므로 $\alpha-\theta\approx\sin(\alpha-\theta)$이고, 그 오차는 $(\alpha-\theta)^3$ 차수이다. (b)에 의해

$$2(R+d)(\alpha-\theta)\approx 2(R+d)\cdot\frac{d\sin\alpha}{R+d}=2d\sin\alpha.$$

따라서

$$S \approx 2d\sin\alpha + 2\alpha w - 2\alpha d = 2\alpha w - 2d(\alpha - \sin\alpha).$$

이제 (iii)에서 얻은 $d \approx \dfrac{w}{1-\cos\alpha}$를 쓰면

$$S \approx 2w\left(\alpha - \frac{\alpha - \sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right) = 2w \cdot \frac{\alpha - \alpha\cos\alpha - \alpha + \sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{2w(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)}{1-\cos\alpha}.$$

마지막으로 $L = 2\alpha R(1+\varepsilon) \approx 2\alpha R$이고, S가 이미 ε에 대해 1차이므로 L을 $2\alpha R$로 바꾸어도 S/L은 2차에서만 달라진다. 그러므로

$$\frac{S}{L} \approx \left(\frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha(1-\cos\alpha)}\right)\frac{w}{R},$$

이고, 이것이 구하려던 비율이다.

검산

- $\alpha = \frac{1}{2}\pi$일 때 이 비율은 $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{w}{R} \approx 0.637\,\frac{w}{R}$이고, $\alpha = \frac{1}{3}\pi$일 때는 약 $0.654\,\frac{w}{R}$이다. 둘 다 양수인데, $\tan\alpha > \alpha$에서 $\sin\alpha > \alpha\cos\alpha$가 나오므로 당연히 그래야 한다.
- $R = 1, w = 0.01, \alpha = \frac{1}{2}\pi$일 때 정확한 공식으로 계산하면 $d \approx 0.01005$, $\alpha - \theta \approx 0.00995$, $S/L \approx 0.006285$이고, 근삿값은 0.006366이다. 상대오차는 약 1%로 w/R 차수이며, 마땅히 그래야 하듯 w를 10으로 나누면 오차도 10분의 1로 줄어든다.
- 컴퓨터로 A와 B를 좌표에 놓고 접하는 원을 직접 구하여, 무작위로 고른 수천 가지의 R, w, α에 대해 d, $\sin(\alpha-\theta)$, S의 공식을 확인하였다.

흔한 실수

- $OO' = R + d + R$ 또는 $OO' = w$로 잡는 것: 두 원은 **내접**하므로 중심 사이의 거리는 반지름의 차, 곧 d이다.
- 삼각형 AOO'에서 O에서의 각에 대해 $\cos(\pi-\alpha)$ 대신 $\cos\alpha$를 쓰는 것: 그러면 마지막 항의 부호가 바뀐다.
- (iii)에서 $\sin(\alpha-\theta)$가 작다는 것만 말하는 것: 각 자체가 작다고 결론 내리려면 $\alpha - \theta$가 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에 있다는 것도 보여야 한다.

STEP 너머

"1보다 훨씬 작다"는 섭동 이론(perturbation theory)의 언어이다. 작은 매개변수 ε에 대해 전개하고, 주된 항을 남기고, 오차가 정말로 더 높은 차수인지 확인하는 것이다. 대학에서

는 이것을 테일러(Taylor) 정리(Taylor's theorem)와 빅오 표기법(big-O notation)으로 엄밀하게 다루며, 여기에 적용하면 S/L이 주어진 비율에 ε을 곱한 것에 ε^2 차수의 항을 더한 것과 같음을 보일 수 있다. 나머지항이 있는 테일러 정리를 꼼꼼히 다룬 책으로는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 보라. 같은 성격의 문제를 더 풀어 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.