풀이

STEP II 2021, 문제 5

순수수학 • 일계 미분방정식

> **STEP II 2021, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

소문항 (i)은 변수분리형(separable)도 아니고 다루기 쉬운 꼴의 선형(linear) 방정식으로 바로 보이지도 않는 일계 미분방정식(first-order differential equation)이지만, 제시된 치환(substitution)을 하면 곧바로 적분할 수 있는 방정식으로 바뀐다. 소문항 (ii)는 기하 문제처럼 보이지만, 접선(tangent)의 방정식을 쓰고 그 접선이 $(1, t)$를 지나야 한다는 조건을 넣으면 $a = 1$인 소문항 (i)의 방정식이 정확히 나온다. 그래프의 개형은 도함수(derivative)에서 얻는데, 이 도함수는 놀랄 만큼 간단하다.

풀이

소문항 (i)

이 방정식은 $x \neq a$일 때만 의미가 있으므로, $x > a$인 구간이나 $x < a$인 구간에서 생각한다. $y = (x-a)u$로 두면 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + (x-a)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

이를 방정식에 대입하면

$$(x-a)u + (x-a)^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = (x-a)u - x \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{(x-a)^2}.$$

u가 들어 있는 항이 소거되는데, 바로 이것이 이 치환의 핵심이다. $x = (x-a) + a$로 쓰면

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x-a} - \frac{a}{(x-a)^2}, \qquad \text{따라서} \qquad u = -\ln|x-a| + \frac{a}{x-a} + c$$

이고, 여기서 c는 상수이다. 양변에 $x-a$를 곱하면

$$\boxed{y = a + (x-a)(c - \ln|x-a|)}$$

이다. 단, 상수 c는 $x = a$의 양쪽에서 서로 다를 수 있다.

확인해 보자. $y' = c - \ln|x-a| - 1$이므로 $(x-a)y' = (y-a) - (x-a) = y - x$이고, 이는 주어진 방정식과 같다.

소문항 (ii)

점 $(t, \mathrm{f}(t))$에서의 접선은 $y = \mathrm{f}(t) + \mathrm{f}'(t)(x-t)$이다. 이 접선이 $(1, t)$를 지날 필요충분조건은

$$t = \mathrm{f}(t) + \mathrm{f}'(t)(1-t), \qquad \text{즉,} \qquad (t-1)\,\mathrm{f}'(t) = \mathrm{f}(t) - t.$$

t를 x로 바꾸어 쓰면, 이는 $x \neq 1$에서 성립하는 $a = 1$인 소문항 (i)의 방정식이다. 따라서 $x < 1$과 $x > 1$ 각각에서

$$\mathrm{f}(x) = 1 + (x-1)(c - \ln|x-1|),$$

이고, 상수는 양쪽에서 따로 정한다.

> **생각해 보기** $\mathrm{f}(0) = 0$과 같은 조건 하나로 모든 x에서 곡선을 결정할 수 없는 이유는 무엇인가?

이 방정식은 $x = 1$에서 아무것도 알려 주지 않으므로, $x < 1$에서의 해와 $x > 1$에서의 해는 서로 독립이다. 그래서 문제에서 각 부분마다 조건을 따로 준 것이다.

(a) $x < 1$이면 $|x-1| = 1 - x$이다. 조건 $\mathrm{f}(0) = 0$에서 $0 = 1 + (-1)(c - \ln 1) = 1 - c$이므로 $c = 1$이고

$$\boxed{\mathrm{f}(x) = 1 + (x-1)(1 - \ln(1-x)) \quad (x < 1).}$$

미분하면 $\mathrm{f}'(x) = 1 - \ln(1-x) + (x-1)\cdot\dfrac{1}{1-x} = -\ln(1-x)$이다. 따라서 다음이 성립한다.

- $\mathrm{f}'(x) = 0$은 $1 - x = 1$일 때뿐이므로 정류점(stationary point)은 $(0,0)$ 하나이다. $x < 1$에서 $\mathrm{f}''(x) = \dfrac{1}{1-x} > 0$이므로 곡선은 아래로 볼록(convex)하고 $(0,0)$은 극소점(minimum)이다. 따라서 $\mathrm{f}(x) \geq 0$이고, 곡선은 원점에서 x축에 접한다.
- $x \to 1^-$일 때 $z = x - 1 \to 0$으로 두면, $z\ln|z| \to 0$을 이용하여 $\mathrm{f}(x) = 1 + z - z\ln|z| \to 1$이다. 기울기(gradient) $-\ln(1-x) \to +\infty$이므로, 곡선은 $(1,1)$을 향해 가면서 그곳에서 수직이 된다.
- $x \to -\infty$일 때 $x - 1$과 $1 - \ln(1-x)$는 모두 절댓값이 큰 음수이므로 $\mathrm{f}(x) \to +\infty$이다.

그래프를 그리는 데 도움이 되는 점으로는 $\mathrm{f}(1 - \mathrm{e}) = 1$과 $\mathrm{f}(-1) = 2\ln 2 - 1 \approx 0.39$가 있다.

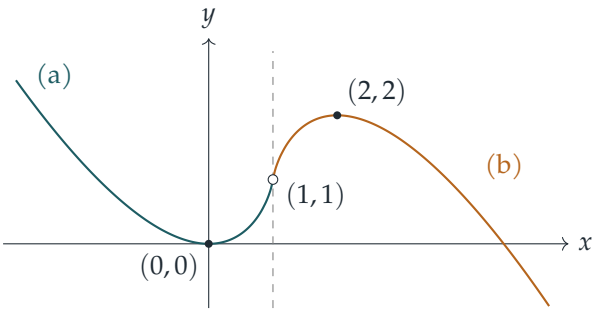
(b) $x > 1$이면 $|x-1| = x-1$이다. 조건 $\mathrm{f}(2) = 2$에서 $2 = 1 + 1\cdot(c-0)$이므로 이번에도 $c = 1$이고

$$\mathrm{f}(x) = 1 + (x-1)\big(1 - \ln(x-1)\big) \quad (x > 1), \qquad \mathrm{f}'(x) = -\ln(x-1).$$

- 정류점은 $x = 2$, 즉 $(2,2)$ 하나뿐이다. 여기서 $\mathrm{f}''(x) = -\dfrac{1}{x-1} < 0$이므로 곡선은 위로 볼록(concave)하고 $(2,2)$는 극대점(maximum)이다.
- $x \to 1^+$일 때 (같은 극한에 의해) $\mathrm{f}(x) \to 1$이고 $\mathrm{f}'(x) \to +\infty$이다. 즉 곡선은 $(1,1)$에서 수직으로 출발한다.
- $x \to \infty$일 때 $1 - \ln(x-1) \to -\infty$이므로 $\mathrm{f}(x) \to -\infty$이다. 곡선은 $(1+\mathrm{e}, 1)$을 지나고, $x \approx 4.59$ 근처에서 x축과 한 번 만난다.

? 생각해 보기 (a)를 끝낸 뒤에 (b)의 개형을 더 빨리 알아내는 방법이 있을까?

있다. $s = |x-1|$로 두면 (a)의 곡선은 $\mathrm{f}(1-s) = 1 - s(1-\ln s)$이고, (b)의 곡선은 $\mathrm{f}(1+s) = 1 + s(1-\ln s)$이다. 따라서 $\mathrm{f}(1+s) - 1 = -\big(\mathrm{f}(1-s) - 1\big)$이다. 즉 (b)의 곡선은 (a)의 곡선을 $(1,1)$을 중심으로 반 바퀴 회전한 것이다. 극소점 $(0,0)$은 극대점 $(2,2)$로 옮겨진다.



곡선은 $x = 1$에서 정의되지 않지만(빈 원), 두 곡선 모두 수직인 접선을 가지며 $(1,1)$에 다가간다.

검산

- 접선의 성질을 직접 확인해 보자. $t = 0$에서 접선은 수평선 $y = 0$이고, 실제로 $(1,0)$을 지난다. $t = 2$에서 접선은 $y = 2$이고, $(1,2)$를 지난다.
- $t = -1$일 때: $\mathrm{f}(-1) \approx 0.386$이고 $\mathrm{f}'(-1) = -\ln 2 \approx -0.693$이다. $x = 1$에서 접선의 높이는 $0.386 + 2(-0.693) \approx -1.000$이고, 이는 t와 같다.

- 대칭성 확인: 모든 $s > 0$에 대하여 $f(1+s) + f(1-s) = 2$이다. 예를 들어 $f(4) + f(-2) = (4 - 3\ln 3) + (3\ln 3 - 2) = 2$이다.

흔한 실수

- $\ln|x-a|$에서 절댓값(modulus)을 빠뜨려서, 소문항 (a)에서 $x < 1$인 경우를 다루지 못하는 것.
- (a)에서 구한 상수가 $x > 1$에서도 저절로 적용된다고 가정하는 것. 이 문제에서는 우연히 같은 값이 나오지만, 이는 $f(2) = 2$를 이용해 확인해야 한다.
- $x \to 1$일 때 $f(x) \to 0$이라거나 발산한다고 결론짓는 것. 항 $(x-1)\ln|x-1|$은 0으로 수렴하므로 $f \to 1$이다. 발산하는 것은 기울기이다.

STEP 너머

방정식 $(x-a)y' = y - x$는 원점을 $x = a$, $y = a$로 옮기면 **동차**(homogeneous) 방정식이 된다. 즉 $X = x - a$, $Y = y - a$로 두면 $XY' = Y - X$가 된다. 이때 치환 $Y = Xu$는 동차 방정식을 푸는 표준적인 방법이다. y'의 계수가 0이 되는 점 $x = a$는 **특이점**(singular point)이며, 특이점 양쪽의 해는 서로 아무런 관계가 없을 수도 있다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 두 개념을 모두 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.