풀이

STEP II 2021, 문제 4

순수수학 • 람베르트 W 함수

> **STEP II 2021, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 3.9 절 **새로운 함수 만들기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch03/lambert-w.html

핵심 아이디어

함수 g는 xe^x를 되돌리는 함수이므로, 이 문제 전체는 각 방정식을 어떤 새로운 변수 u에 대하여 $ue^u = c$ 꼴로 변형하는 것에 관한 것이다. 일단 이 꼴이 되면 소문항 (i)의 그래프가 모든 것을 알려 준다. $c < -\frac{1}{e}$이면 해가 없고, $-\frac{1}{e} < c < 0$이면 해가 두 개인데, g는 그중 $u \geq -1$인 것만을 골라낸다. 로그(logarithm)는 $x = e^u$로 치환하여 처리한다.

풀이

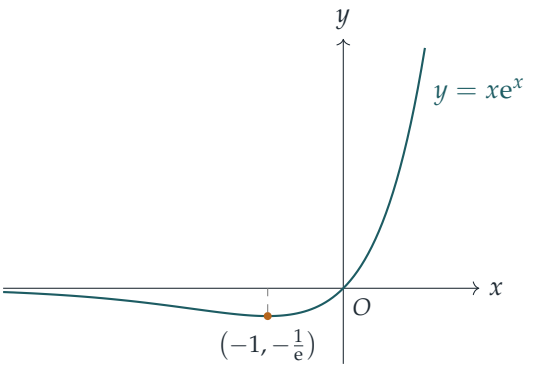
소문항 (i)

$y = xe^x$라 하자. 곱의 미분법(product rule)에 의하여

$$\frac{dy}{dx} = (1+x)e^x,$$

이고, $e^x > 0$이므로 이 값은 $x = -1$에서만 0이 된다. 기울기는 $x < -1$에서 음수이고 $x > -1$에서 양수이므로, 유일한 정류점(stationary point)은 $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$에서의 극소점이다.

곡선의 부호는 x의 부호와 같고, 곡선은 원점을 지난다. $x \to \infty$일 때 $y \to \infty$로 빠르게 커진다. $x \to -\infty$일 때는 e^x가 x를 압도하므로, 아래쪽에서 $y \to 0$이다. 즉 x축의 음의 부분이 점근선(asymptote)이다.



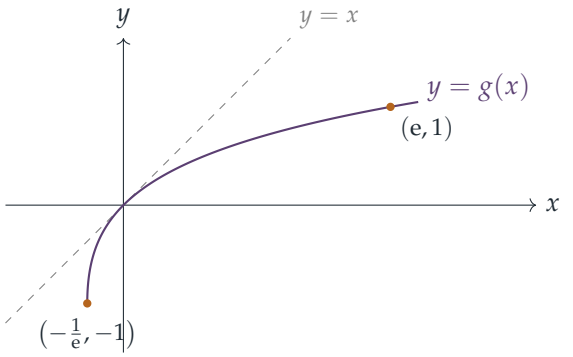
소문항 (ii)

f가 역함수(inverse function)를 가지려면 $[a, \infty)$에서 일대일(one-to-one)이어야 한다. $a < -1$이면 이 구간은 $x = -1$ 근처의 극소점 양쪽에 있는 점들을 포함하고, f는 연속이며 $(-\infty, -1]$에서 순감소, $[-1, \infty)$에서 순증가하므로, $-\frac{1}{\mathrm{e}}$보다 조금 큰 어떤 값을 두 번 갖게 된다. $a \geq -1$이면 f는 순증가하므로 일대일이다. 따라서 가능한 최솟값은

$$a = -1.$$

이다. 이때 f는 $[-1, \infty)$를 $[-\frac{1}{\mathrm{e}}, \infty)$ 위로 보내므로, g의 정의역(domain)은 $[-\frac{1}{\mathrm{e}}, \infty)$이고 치역(range)은 $[-1, \infty)$이다.

g의 그래프는 소문항 (i)의 오른쪽 가지를 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동한 것이다. 이 그래프는 $\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}, -1\right)$에서 수직 접선(극소점에서의 수평 접선을 대칭이동한 것)을 가지며 시작하고, 원점을 지나며 그곳에서 기울기는 1이다($f'(0) = 1$이므로). 그리고 점점 더 느리게 증가한다. $g(\mathrm{e}) = 1$이고, x가 클 때 $g(x)$는 $\ln x$보다 느리게 증가한다.



소문항 (iii)에서는 두 가지 사실을 반복해서 사용한다. $c \geq -\frac{1}{\mathrm{e}}$일 때 $u = g(c)$는 $u\mathrm{e}^u = c$의 해 가운데 $u \geq -1$인 것이다. 또 소문항 (i)의 그래프로부터 방정식 $u\mathrm{e}^u = c$는

- $c < -\frac{1}{\mathrm{e}}$이면 실수해가 없다.

- $-\frac{1}{\mathrm{e}} < c < 0$이면 실수해가 두 개, 즉 $g(c) \in (-1, 0)$과 -1보다 작은 다른 하나가 있다.
- $c \geq 0$이면 실수해가 $g(c)$ 하나뿐이다($u < 0$이면 좌변이 음수이기 때문이다).

소문항 (iii)

(a) (0이 되는 일이 없는) e^x를 곱하면

$$x\mathrm{e}^x = \tfrac{1}{5}.$$

이다. $\frac{1}{5} > 0$이므로 실근은 정확히 하나이고, 그것은

$$x = g\left(\tfrac{1}{5}\right).$$

이다.

(b) $\ln x$가 정의되려면 $x > 0$이어야 하므로, $u = \ln x$를 실수로 하여 $x = \mathrm{e}^u$로 놓는다. 그러면 방정식은

$$2u\mathrm{e}^u + 1 = 0 \iff u\mathrm{e}^u = -\tfrac{1}{2}.$$

이 된다. 그런데 모든 u에 대하여 $u\mathrm{e}^u \geq -\frac{1}{\mathrm{e}}$이고, $\mathrm{e} > 2$이므로 $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{\mathrm{e}}$이다. 따라서 실근은 없다.

(c) 앞에서처럼 $x = \mathrm{e}^u$로 놓으면

$$3u\mathrm{e}^u + 1 = 0 \iff u\mathrm{e}^u = -\tfrac{1}{3}.$$

이다. 이제 $\mathrm{e} < 3$이므로 $-\frac{1}{\mathrm{e}} < -\frac{1}{3} < 0$이고, 따라서 u의 값이 두 개 있으며, ($u \mapsto \mathrm{e}^u$가 일대일이므로) 실근 x도 두 개이다. 그중 하나는

$$x = \mathrm{e}^{g(-1/3)}.$$

이다.

? **생각해 보기** 이것은 두 근 중 큰 근인가, 작은 근인가?

u의 다른 값은 -1보다 작은 반면, $g(-\frac{1}{3}) > -1$이다. e^u는 u에 대하여 증가하므로, 근 $\mathrm{e}^{g(-1/3)}$은 두 근 중 큰 근이다.

(d) 이번에도 $x > 0$이다. 지수를 취하면 $x = 3\ln x \iff \mathrm{e}^{x/3} = x \iff x\mathrm{e}^{-x/3} = 1$이다. $u\mathrm{e}^u$ 꼴을 얻으려면 앞에 곱해진 인수가 지수와 일치해야 하므로, $u = -\frac{x}{3}$으로 놓고 양변에 $-\frac{1}{3}$을 곱한다.

$$\left(-\frac{x}{3}\right)\mathrm{e}^{-x/3} = -\frac{1}{3}.$$

(c)에서처럼 $-\frac{1}{\mathrm{e}} < -\frac{1}{3} < 0$이므로 u의 값이 두 개 있고, 둘 다 음수이므로 양의 근 $x = -3u$가 두 개 생긴다. 그중 한 근은

$$x = -3\,g\left(-\tfrac{1}{3}\right).$$

이다. 이번에는 사상 $u \mapsto x = -3u$가 감소한다. u의 다른 값은 -1보다 작으므로 다른 근은 3보다 크고, 우리가 구한 근은 $x = -3g(-\frac{1}{3}) < 3$을 만족한다. 따라서 우리가 구한 근은 두 근 중 작은 근이다.

소문항 (iv)

$x > 0$이므로 로그를 취하면 $x^x = 10 \iff x \ln x = \ln 10$이다. $x = \mathrm{e}^u$로 놓으면

$$u\mathrm{e}^u = \ln 10.$$

이다. $\ln 10 > 0$이므로 이 방정식의 해는 $u = g(\ln 10)$ 하나뿐이고, 따라서 근은

$$x = \mathrm{e}^{g(\ln 10)}.$$

이다. (동치로, $c \neq 0$일 때 $\mathrm{e}^{g(c)} = c/g(c)$이므로 근은 $\dfrac{\ln 10}{g(\ln 10)}$이다.)

검산

- 수치적으로 $g(-\frac{1}{3}) \approx -0.6191$이다. (c)에서 이로부터 $x \approx 0.5384$를 얻고, $3(0.5384)\ln(0.5384) \approx -1.000$이다. 다른 근은 약 0.2204로, 실제로 더 작다.
- (d)에서 $x \approx 1.8572$이고 $3\ln 1.8572 \approx 1.8572$이다. 다른 근은 약 $4.536 > 3$으로, 예측한 대로이다.
- (iv)에서 $g(\ln 10) \approx 0.9188$이므로 $x \approx 2.5062$이고, $2.5062^{2.5062} \approx 10.00$이다.
- (b)에서 $2x \ln x + 1$의 최솟값은 ($x = \frac{1}{\mathrm{e}}$에서) $1 - \frac{2}{\mathrm{e}} \approx 0.264 > 0$이므로, 근이 없음이 확인된다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 곡선이 그곳에서 일대일로 "보인다"는 이유로 $a = 0$으로 잡는 것. 극점은 원점이 아니라 $x = -1$에 있다.
- (d)에서 $-\frac{1}{3}$을 곱하는 것을 잊어, 앞의 인수가 지수와 일치하지 않아 g를 적용할 수 없게 되는 것.
- g를 통해 구한 근이 항상 큰 근이라고 가정하는 것. $x = \mathrm{e}^u$가 u에 대하여 증가하는 (c)에서는 그렇지만, $x = -3u$가 순서를 뒤집는 (d)에서는 그렇지 않다.

STEP 너머

함수 g는 **램버트 W 함수**(Lambert W function)의 주가지(principal branch)로, 보통 W_0로 쓴다. $-\frac{1}{\mathrm{e}} < c < 0$일 때 $u\mathrm{e}^u = c$의 다른 해는 두 번째 가지 W_{-1}에서 나온다. 이 함수는 지연 미분방정식(delay differential equation), 조합론(레이블이 붙은 나무의 개수 세기), 물리학 등 미지수가 지수함수의 안과 밖에 동시에 나타나는 곳이면 어디서나 등장한다. 일대일이 되지 않는 점을 넘어 역함수를 연장하는 것은 복소해석학(complex analysis)에서 가지와 분기점(branch point) 이론의 출발점이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 아이디어를 만나기에 아름다운 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.