풀이

STEP II 2021, 문제 3

순수수학 • 정수 부분과 소수 부분

> **STEP II 2021, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 실수는 정수 부분(integer part)과 $[0,1)$에 속하는 소수 부분(fractional part)으로 유일하게 나뉜다. 그러므로 어떤 방정식이 "정수 더하기 $[0,1)$에 속하는 수는 4.9이다"라고 말하면 두 조각이 모두 결정된다. 정수는 4이어야 하고 소수 부분은 0.9이어야 한다. (ii)와 (iii)에서는 방정식들이 서로 얽혀 있지만, 세 방정식을 모두 더하면 각각의 $\lfloor t \rfloor + \{t\}$가 다시 합쳐져 t가 된다. 그러면 깔끔한 일차방정식(linear equation) 하나를 얻고, 여기서 원래 방정식을 하나씩 빼면 미지수들이 정확히 그 "정수 더하기 소수 부분" 꼴로 분리된다.

풀이

풀이 전체에서 다음 사실을 사용한다. n이 정수이고 $0 \le f < 1$이며 $n + f = c$이면 $n = \lfloor c \rfloor$이고 $f = \{c\}$이다. 이것이 성립하는 이유는 $n \le c < n+1$이므로 n이 c를 넘지 않는 가장 큰 정수로 정해지기 때문이다.

소문항 (i)

첫째 방정식에서 $\lfloor x \rfloor$는 정수이고 $0 \le \{y\} < 1$이므로

$$\lfloor x \rfloor = 4, \qquad \{y\} = 0.9.$$

둘째 방정식에서 $\lfloor y \rfloor$는 정수이고 $0 \le \{x\} < 1$이므로 $\lfloor y \rfloor = \lfloor -1.4 \rfloor = -2$이고 $\{x\} = -1.4 - (-2) = 0.6$이다. 따라서

$$x = 4 + 0.6 = 4.6, \qquad y = -2 + 0.9 = -1.1.$$

이 값들은 두 방정식을 모두 만족하며($4 + 0.9 = 4.9$이고 $0.6 - 2 = -1.4$), 이것이 유일한 해임을 보였다.

소문항 (ii)

세 방정식을 더한다. x, y, z는 각각 한 번은 그 자체로 나타나고, 또 한 번은 서로 다른 두 방정식에 걸쳐 $\lfloor\cdot\rfloor + \{\cdot\}$로 나뉘어 나타난다.

$$(x+y+z) + (\{x\}+\lfloor x\rfloor) + (\lfloor y\rfloor + \{y\}) + (\{z\}+\lfloor z\rfloor) = 3.9 + 5.3 + 5,$$

즉 $2(x+y+z) = 14.2$이므로

$$x+y+z = 7.1.$$

생각해 보기 이제 $x+y+z$를 알았으니, 여기서 원래 방정식 하나를 빼면 무엇이 남는가?

$x+y+z = 7.1$에서 첫째 방정식을 빼면 x가 없어지고 $y-\lfloor y\rfloor$와 $z-\{z\}$가 남는다.

$$\{y\} + \lfloor z\rfloor = 7.1 - 3.9 = 3.2,$$

이것이 보이라고 한 결과이다. 같은 방법으로 둘째와 셋째 방정식을 빼면

$$\lfloor x\rfloor + \{z\} = 7.1 - 5.3 = 1.8, \qquad \{x\} + \lfloor y\rfloor = 7.1 - 5 = 2.1.$$

이 식들은 모두 "정수 더하기 소수 부분" 꼴이므로

$$\begin{aligned} \lfloor z\rfloor &= 3, & \{y\} &= 0.2,\\ \lfloor x\rfloor &= 1, & \{z\} &= 0.8,\\ \lfloor y\rfloor &= 2, & \{x\} &= 0.1. \end{aligned}$$

따라서 $x = 1.1, y = 2.2, z = 3.8$이다. 이것이 가능한 유일한 해이며, 실제로 성립한다.

$$1.1 + 2 + 0.8 = 3.9, \qquad 0.1 + 2.2 + 3 = 5.3, \qquad 1 + 0.2 + 3.8 = 5.$$

소문항 (iii)

같은 요령이 통한다. 세 방정식을 더하고 $2\lfloor y\rfloor + 2\{y\} = 2y$를 이용하면

$$2x + 4y + 2z = 14.2, \qquad \text{따라서} \qquad x + 2y + z = 7.1.$$

여기서 각 방정식을 차례로 빼면

$$2\{y\} + \lfloor z\rfloor = 3.2, \qquad \lfloor x\rfloor + \{z\} = 1.8, \qquad \{x\} + 2\lfloor y\rfloor = 2.1.$$

가운데 방정식은 익숙한 꼴이므로 $\lfloor x\rfloor = 1$이고 $\{z\} = 0.8$이다.

셋째 방정식에서 $2\lfloor y\rfloor$는 여전히 정수이고 $0 \le \{x\} < 1$이므로 앞의 논리가 그대로 적용된다. 즉 $2\lfloor y\rfloor = 2$이고 $\{x\} = 0.1$이다. 따라서 $\lfloor y\rfloor = 1$이고 $x = 1.1$이다.

? 생각해 보기 첫째 방정식도 여전히 답을 하나로 정해 주는가?

그렇지 않다. 여기서 $2\{y\}$는 $[0,1)$이 아니라 $[0,2)$에 속하므로, 3.2를 정수 더하기 $[0,2)$에 속하는 수로 나타내는 방법이 두 가지 있다.

- $\lfloor z \rfloor = 3, 2\{y\} = 0.2$, 따라서 $\{y\} = 0.1$;
- $\lfloor z \rfloor = 2, 2\{y\} = 1.2$, 따라서 $\{y\} = 0.6$.

($\lfloor z \rfloor \geq 4$이면 $2\{y\} < 0$이고, $\lfloor z \rfloor \leq 1$이면 $2\{y\} \geq 2.2$이므로 둘 다 불가능하다.) $\lfloor y \rfloor = 1$과 $\{z\} = 0.8$을 함께 쓰면 두 후보를 얻는다.

$$(x,y,z) = (1.1,\ 1.1,\ 3.8) \qquad \text{또는} \qquad (x,y,z) = (1.1,\ 1.6,\ 2.8).$$

두 후보 모두 원래 연립방정식을 만족한다.

$$\begin{aligned}
(1.1,1.1,3.8): &\quad 1.1+2+0.8=3.9, \quad 0.1+2.2+3=5.3, \quad 1+0.2+3.8=5;\\
(1.1,1.6,2.8): &\quad 1.1+2+0.8=3.9, \quad 0.1+3.2+2=5.3, \quad 1+1.2+2.8=5.
\end{aligned}$$

따라서 (iii)의 연립방정식의 해는 정확히 이 두 개이다.

검산

위에서 한 것처럼 답을 다시 대입하면 모든 방정식이 성립한다. 독립적인 확인으로, x와 y를 $[-10,10]$에 속하는 0.1의 모든 배수에 걸쳐 컴퓨터로 탐색해 보면 (i)의 해는 정확히 하나, (ii)의 해도 하나, (iii)의 해는 정확히 위의 두 개가 나온다. 또한 (ii)의 해에 대하여 $\{y\} + \lfloor z \rfloor = 0.2 + 3 = 3.2$가 되어 마땅히 그래야 하는 대로 성립함에 주목하자.

흔한 실수

- 음수의 바닥함수(floor) 값을 잘못 구하는 실수. $\lfloor -1.4 \rfloor = -2$이지 -1이 아니므로, (i)에서 $\{x\} = 0.6$이다.
- (iii)에서 $2\{y\}$를 소수 부분이라고 가정하여 해를 하나만 찾는 실수. 이 값은 $[0,2)$에 속하며, 그 때문에 두 번째 해가 나타난다.
- 후보를 원래 방정식에 대입해 확인하지 않는 실수. 위의 추론은 그 값들만이 가능한 후보라는 것을 보일 뿐이다.

STEP 너머

$x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$로 쓰는 것은 법 1에 대하여(modulo 1) 계산하는 것과 같다. 소수 부분은 원 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$에서의 x의 상이다. 바닥함수와 소수 부분은 정수론 곳곳에 등장한다. 예를 들어 $n!$을 나누는 소수(prime)의 최고 거듭제곱을 구하는 르장드르(Legendre)의 공식에 나오고, 무리수(irrational) α에 대하여 $n\alpha$의 소수 부분들이 $[0,1)$에 어떻게 퍼져 있는지를 연구할 때에도 나온다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 이러한 생각들에 대한 훌륭한 입문서이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.