풀이

STEP II 2021, 문제 2

순수수학 • 근의 대칭함수

> **STEP II 2021, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

두 수의 거듭제곱 합(power sum)은 단 두 개의 양, 곧 두 수의 합과 곱에 의해 결정된다. $a+b$와 a^2+b^2을 알면 곱 ab가 정해지고, 따라서 a^3+b^3도 정해진다. 이것이 소문항 (i)의 제약 조건이다. 소문항 (iii)은 같은 사실을 c를 "제거한" 상태에서 사용한다. 세 변수의 합에서 c, c^2, c^3을 빼면 두 변수의 합이 남고, 소문항 (i)의 제약 조건은 c가 만족해야 하는 삼차방정식(cubic equation)으로 바뀐다.

풀이

소문항 (i)

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$에서 $p^2 = q+2ab$를 얻으므로

$$ab = \frac{p^2-q}{2}.$$

이제 인수분해(factorisation) $a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$를 이용하면

$$\begin{aligned} r = a^3+b^3 &= p^3 - 3p\cdot\frac{p^2-q}{2} \\ &= \frac{2p^3-3p^3+3pq}{2} = \frac{3pq-p^3}{2}. \end{aligned}$$

따라서 요구한 대로 $3pq-p^3 = 2r$이다. 여기서 p, q, r이 실수라는 사실은 전혀 사용하지 않았다는 점에 주목하자. 이 항등식(identity)은 임의의 복소수(complex number) a, b에 대해 성립한다. 이 사실은 소문항 (iii)에서 필요하다.

소문항 (ii)

이차방정식(quadratic equation) $2x^2 - 2px + (p^2 - q) = 0$은 근의 공식(quadratic formula)으로 주어지는 두 근(root)을 항상 가진다(두 근이 같을 수도 있고, 실수가 아닐 수도 있다). 이 두 근을 a와 b라 하자. 양변을 2로 나누면 이차식은 $x^2 - px + \frac{1}{2}(p^2 - q)$이므로

$$a + b = p, \qquad ab = \frac{p^2 - q}{2}.$$

이로부터 $(*)$의 첫 번째 방정식이 바로 나온다. 다음으로

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = p^2 - (p^2 - q) = q,$$

이것이 두 번째 방정식이고,

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = p^3 - \frac{3p(p^2 - q)}{2} = \frac{3pq - p^3}{2} = r,$$

마지막 단계에서 가정 $3pq - p^3 = 2r$을 사용하였다. 따라서 $(*)$의 세 방정식이 모두 성립한다.

이차방정식을 이렇게 고른 것은 운이 아니다. 소문항 (i)이 ab가 무엇이어야 하는지 알려 주었고, 두 근의 합이 p, 곱이 $\frac{1}{2}(p^2 - q)$인 이차식은 정확히 $x^2 - px + \frac{1}{2}(p^2 - q)$이다.

소문항 (iii)

다음과 같이 놓자.

$$p = a + b = s - c, \qquad q = a^2 + b^2 = t - c^2, \qquad r = a^3 + b^3 = u - c^3.$$

생각해 보기 소문항 (i)에서는 p, q, r이 실수라고 가정했지만, 여기서는 복소수일 수도 있는 c가 들어 있다. 그래도 소문항 (i)을 사용할 수 있을까?

그렇다. 소문항 (i)의 끝에서 언급했듯이 그 논증은 순수한 대수 계산이며 실수라는 성질을 전혀 사용하지 않았다. 따라서 $3pq - p^3 = 2r$, 곧

$$3(s - c)(t - c^2) - (s - c)^3 = 2(u - c^3).$$

전개하면

$$3(s - c)(t - c^2) = 3st - 3sc^2 - 3tc + 3c^3,$$
$$(s - c)^3 = s^3 - 3s^2c + 3sc^2 - c^3,$$

이므로 방정식은 다음과 같이 된다.

$$3st - 3sc^2 - 3tc + 3c^3 - s^3 + 3s^2c - 3sc^2 + c^3 = 2u - 2c^3.$$

c의 거듭제곱별로 정리하면

$$6c^3 - 6sc^2 + 3(s^2 - t)c + 3st - s^3 - 2u = 0.$$

따라서 요구한 대로 c는 $6x^3 - 6sx^2 + 3(s^2 - t)x + 3st - s^3 - 2u = 0$의 근이다.

계수(coefficient)는 s, t, u에만 의존하며, 이들은 a, b, c에 대해 대칭(symmetric)이다. c 대신 a(또는 b)를 놓고 같은 논증을 반복하면 a와 b도 근임을 알 수 있다. 따라서 나머지 두 근은 a와 b이다.

? **생각해 보기** a, b, c가 서로 다르다는 사실이 왜 중요할까?

삼차방정식의 근은 많아야 세 개이다. a, b, c는 서로 다른 세 근이므로 이것이 근의 전부이고, 각각 단순근(simple root)이다. 따라서

$$6x^3 - 6sx^2 + 3(s^2 - t)x + 3st - s^3 - 2u = 6(x - a)(x - b)(x - c).$$

(예를 들어 $a = b$라면 근을 두 개만 알 뿐이어서 세 번째 근을 확정할 수 없다.) 상수항(constant term)을 비교하면 $3st - s^3 - 2u = -6abc = -6v$, 곧

$$s^3 - 3st + 2u = 6v.$$

소문항 (iv)

여기서는 $s = 3$, $t = 1$, $u = -3$, $v = 2$이다. 먼저 조건이 모순되지 않는지 확인하자. 소문항 (iii)의 조건은 $27 - 9 - 6 = 12 = 6 \times 2$가 되어 성립한다. 소문항 (iii)에 따르면 a, b, c는

$$6x^3 - 18x^2 + 3(9 - 1)x + 9 - 27 + 6 = 6x^3 - 18x^2 + 24x - 12 = 0,$$

곧 $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$의 근이어야 한다. $x = 1$을 대입하면 $1 - 3 + 4 - 2 = 0$이므로

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x - 1)(x^2 - 2x + 2) = (x - 1)((x - 1)^2 + 1),$$

따라서 근은 1, $1 + \mathrm{i}$, $1 - \mathrm{i}$이다. 다음과 같이 잡자.

$$a = 1, \qquad b = 1 + \mathrm{i}, \qquad c = 1 - \mathrm{i}.$$

소문항 (iii)은 어디를 찾아봐야 하는지만 알려 주었으므로, 이제 직접 확인해야 한다.

- $a + b + c = 1 + (1 + \mathrm{i}) + (1 - \mathrm{i}) = 3$;
- $(1 + \mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$이고 $(1 - \mathrm{i})^2 = -2\mathrm{i}$이므로 $a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 2\mathrm{i} - 2\mathrm{i} = 1$;
- $(1 + \mathrm{i})^3 = 2\mathrm{i}(1 + \mathrm{i}) = -2 + 2\mathrm{i}$이고 $(1 - \mathrm{i})^3 = -2\mathrm{i}(1 - \mathrm{i}) = -2 - 2\mathrm{i}$이므로 $a^3 + b^3 + c^3 = 1 - 4 = -3$;
- $abc = 1 \cdot (1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i}) = 1 \cdot 2 = 2$.

네 방정식 $(**)$이 모두 성립한다. (이 세 수의 순서를 어떻게 바꾸어도 똑같이 성립한다.)

검산

- 소문항 (i)에서 $a = 1, b = 2$로 놓으면 $p = 3, q = 5, r = 9$이고 $3pq - p^3 = 45 - 27 = 18 = 2r$이다.
- 소문항 (iii)에서 $a, b, c = 1, 2, 3$으로 놓으면 $s = 6$, $t = 14$, $u = 36$, $v = 6$이고 $s^3 - 3st + 2u = 216 - 252 + 72 = 36 = 6v$이다. 삼차식은 $6x^3 - 36x^2 + 66x - 36 = 6(x-1)(x-2)(x-3)$으로, 마땅히 그래야 하는 대로이다.
- 소문항 (i)–(iii)의 항등식은 무작위로 고른 많은 복소수 a, b, c에 대해 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- 소문항 (iii)에서 삼차식의 계수가 a, b, c에 대해 대칭이라는 점을 언급하지 않고 "a와 b가 나머지 근이다"라고만 쓰는 것.
- 서로 다르다는 조건을 이용해 a, b, c가 근의 **전부**임을 확인하지 않고, 근의 곱으로부터 $s^3 - 3st + 2u = 6v$를 이끌어 내는 것.
- 소문항 (iv)에서 삼차방정식의 근을 구하는 데서 멈추는 것. 문제는 네 방정식을 직접 확인하라고 요구한다.

STEP 너머

이 문제는 거듭제곱 합 $a^k + b^k + c^k$를 기본 대칭 함수(elementary symmetric functions) $a + b + c$, $ab + bc + ca$, abc와 연결하는 뉴턴 항등식(Newton's identities)의 간단한 경우이다. 대칭 다항식의 기본 정리(fundamental theorem of symmetric polynomials)에 따르면 모든 대칭 다항식은 기본 대칭 다항식으로 나타낼 수 있으며, 이것이 갈루아 이론(Galois theory)의 출발점이다. 더 알고 싶다면 Allenby, *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.