풀이

STEP II 2021, 문제 12

확률과 통계 • 도박꾼의 파산

> **STEP II 2021, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

각 경기는 이전에 있었던 상태로 계속 되돌아온다. 그러므로 이기는 방법을 무한히 나열해 더하지 않는다. 그 상태에서 이길 확률을 P라 하고, 다음에 일어나는 일로 조건을 나누어(conditioning) P가 양변에 모두 나타나는 방정식을 얻는다. 같은 방법을 신중한 게임에 적용하면, 그 게임은 소문항 (ii)의 경기로 바뀐다.

풀이

소문항 (i)

A가 경기에서 이길 확률을 P라 하자. 첫 판으로 조건을 나눈다. A가 확률 p_A로 첫 판을 이기면 경기는 끝난다. B가 확률 p_B로 첫 판을 이기면 A는 진 것이다. 그 밖의 경우에는 확률 $1-p_\mathrm{A}-p_\mathrm{B}$로 첫 판이 비기고, 각 판은 독립(independent)이므로 경기는 처음부터 다시 시작된다. 따라서 그 시점에서 A가 이길 확률은 다시 P이다. 그러므로

$$P = p_\mathrm{A} + (1-p_\mathrm{A}-p_\mathrm{B})P \quad\Longrightarrow\quad (p_\mathrm{A}+p_\mathrm{B})P = p_\mathrm{A} \quad\Longrightarrow\quad P = \frac{p_\mathrm{A}}{p_\mathrm{A}+p_\mathrm{B}},$$

이다. 여기서 $p_\mathrm{A}+p_\mathrm{B} > 0$으로 나누었다. (같은 결과를 다르게 얻을 수도 있다. A가 k번째 판에서 이길 확률은 $(1-p_\mathrm{A}-p_\mathrm{B})^{k-1}p_\mathrm{A}$이고, $0 < p_\mathrm{A}+p_\mathrm{B} < 1$이므로 이 기하급수(geometric series)는 수렴한다.)

소문항 (ii)

몇 판을 치른 뒤 A의 승수에서 B의 승수를 뺀 값을 D라 하자. 매 판마다 D는 $+1$ 또는 -1만큼 변하고, 경기는 처음으로 $|D| = 2$가 될 때 끝난다.

길이가 짝수임. n판을 치른 뒤 A가 a번, B가 b번 이겼다면 $a+b=n$이고 $D=a-b=n-2b$이므로 D는 n과 홀짝성(parity)이 같다. 경기는 $D=\pm 2$일 때 끝나고 이는 짝수이므로 n은 짝수이다.

확률. 판을 두 개씩 묶어서 보자. 처음에 경기는 동점($D=0$)이고, 짝수 판을 치른 뒤에만 끝날 수 있으므로 경기를 끝내지 않는 묶음이 지날 때마다 다시 동점이 된다. 동점 상태에서 다음 두 판의 결과는 확률 p^2로 AA(A가 이김), 확률 q^2로 BB(B가 이김), 또는 합한 확률 $2pq$로 AB나 BA이며, 마지막 경우에는 경기가 다시 동점이 된다. 동점 상태에서 A가 이길 확률을 P라 하자. 그러면

$$P = p^2 + 2pq\,P \quad\Longrightarrow\quad P = \frac{p^2}{1-2pq}.$$

$p+q=1$이므로 $1=(p+q)^2=p^2+2pq+q^2$이고, 따라서 $1-2pq=p^2+q^2$이며

$$P = \frac{p^2}{p^2+q^2},$$

이 되어 증명이 끝난다. 여기서 $p^2+q^2>0$이므로 나눗셈에는 문제가 없다.

소문항 (iii)

신중한 방식. 토큰의 개수는 매 라운드 하나씩 늘거나 줄며, 1에서 시작하여 0(패배) 또는 4(승리)에서 멈춘다. 4를 건너뛸 수 없으므로, 플레이어는 토큰 수가 0보다 먼저 4에 도달할 때 그리고 그때에만 이긴다.

> **생각해 보기** 토큰이 2개일 때 플레이어에게 필요한 것은 무엇인가? 이것을 전에 본 적이 있는가?

토큰이 2개일 때, 플레이어는 진 라운드보다 이긴 라운드가 두 번 더 많아지는 것(4에 도달)이 이긴 라운드보다 진 라운드가 두 번 더 많아지는 것(0에 도달)보다 먼저 일어나면 이긴다. 이것은 플레이어를 A로, 운의 게임을 B로 둔 소문항 (ii)의 경기이다. 따라서 토큰이 2개일 때 이길 확률은 $\dfrac{p^2}{p^2+q^2}$이다.

토큰이 1개일 때는 첫 라운드를 반드시 이겨야 한다. 그렇지 않으면 0으로 떨어져 지게 된다. 따라서 첫 라운드에서 확률 p로 토큰이 2개가 되고, 라운드들은 독립이므로

$$P_{\text{cautious}} = p\cdot\frac{p^2}{p^2+q^2} = \frac{p^3}{p^2+q^2}.$$

(방정식을 선호한다면, 토큰이 k개일 때 이길 확률을 P_k라 할 때 $P_1=pP_2$, $P_2=pP_3+qP_1$, $P_3=p+qP_2$로부터 같은 답을 얻는다.)

과감한 방식. 토큰이 1개이면 토큰 수는 2 또는 0이 되고, 2개이면 4 또는 0이 된다. 따라서 플레이어는 처음 두 라운드를 모두 이겨야만 이긴다.

$$P_{\text{bold}} = p^2.$$

비교. 두 확률은 모두 양수이므로 그 비를 1과 비교한다.

$$\frac{P_{\text{cautious}}}{P_{\text{bold}}} = \frac{p}{p^2+q^2}.$$

$p^2+q^2>0$이므로 이 비가 1보다 클 필요충분조건은

$$p > p^2+q^2 \iff p-p^2>q^2 \iff pq>q^2 \iff p>q,$$

이다. 마지막 단계에서는 $q>0$으로 나누었다($p<1$이므로 가능하다). 그리고 $p>q=1-p$는 정확히 $p>\frac{1}{2}$일 때 성립한다. 같은 방법으로, 비가 1보다 작은 것은 정확히 $p<q$, 즉 $p<\frac{1}{2}$일 때이다. 따라서 $\frac{1}{2}<p<1$일 때는 신중한 방식이 낫고, $0<p<\frac{1}{2}$일 때는 과감한 방식이 낫다. ($p=\frac{1}{2}$일 때는 둘 다 $\frac{1}{4}$이다.)

검산

- $p=\frac{1}{2}$일 때 신중한 게임은 공평한 확률보행(random walk)이고, 1에서 출발하여 0보다 먼저 4에 도달할 확률은 $\frac{1}{4}$이다. 우리 공식은 $\frac{1}{8}/\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$를 주며, 이는 과감한 게임의 $p^2=\frac{1}{4}$와 일치한다.
- $p=0.7$일 때: 신중한 방식은 $0.343/0.58\approx 0.591$, 과감한 방식은 0.49이다. $p=0.3$일 때: 신중한 방식은 $0.027/0.58\approx 0.0466$, 과감한 방식은 0.09이다. 두 결과 모두 토큰 분포를 라운드마다 추적하는 컴퓨터 검산과 일치한다.
- 소문항 (ii)에서 $p=\frac{1}{2}$이면 $\frac{1}{2}$가 나오는데, 이는 대칭성에서 기대되는 값이다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 "AB"와 "BA"를 확률 $2pq$가 아니라 확률 pq인 하나의 결과로 취급하는 것.
- 경기를 끝내지 않는 두 판의 묶음이 항상 경기를 동점으로 되돌린다는 것을 정당화하지 않는 것. 경기는 홀수 판 뒤에는 끝날 수 없으므로 실제로 그렇다.
- 비교할 때, 양수라는 것을 밝히지 않고 곱하거나 나누는 것.

STEP 너머

신중한 게임은 **도박꾼의 파산**(*gambler's ruin*) 문제이다. 이것은 흡수 장벽(absorbing barriers)이 있는 확률보행이며, k에서 출발하여 목표가 N일 때 일반적인 답은 $p\neq q$이면 $\dfrac{1-(q/p)^k}{1-(q/p)^N}$이다. 불리한 게임에서는 과감하게, 유리한 게임에서는 소심하게 하는 것이

최선이라는 결과는 Dubins와 Savage의 최적 도박 연구로 거슬러 올라간다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 바로 이런 첫 단계 조건화를 통해 확률보행과 도박꾼의 파산을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.