풀이

STEP II 2021, 문제 10

역학 • 비관성 좌표계

> **STEP II 2021, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 11.5 절 **가속하는 기차 안의 중력**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/accelerating-frame.html

핵심 아이디어

좌표축이 기차와 함께 움직이므로 이 좌표계는 관성계(inertial frame)가 아니다. 가장 깔끔한 해결책은 구슬의 **실제** 가속도(acceleration), 곧 기차에 대한 구슬의 상대 가속도에 기차 자체의 가속도를 더한 것을 구하는 것이다. 그러면 뉴턴의 운동 제2법칙(Newton's second law)이 성립하고, 철사가 매끄러우므로 수직항력(reaction)은 철사에 수직이어서 구슬의 경로를 따라 일(work)을 하지 않는다. 운동 방정식(equation of motion)과 구슬의 (상대) 속도의 내적을 취하면 미지의 수직항력이 사라지고, 보존되는(conserved) 에너지와 비슷한 양이 남는다.

풀이

구슬을 질량 m인 입자로, 철사를 매끄러운(smooth) 것으로 모형화하면, 철사가 구슬에 작용하는 수직항력 $\mathbf{N}$은 항상 철사에 수직이다. 동쪽과 위쪽 방향의 단위벡터(unit vector)를 각각 $\mathbf{i}$와 $\mathbf{j}$로 쓴다.

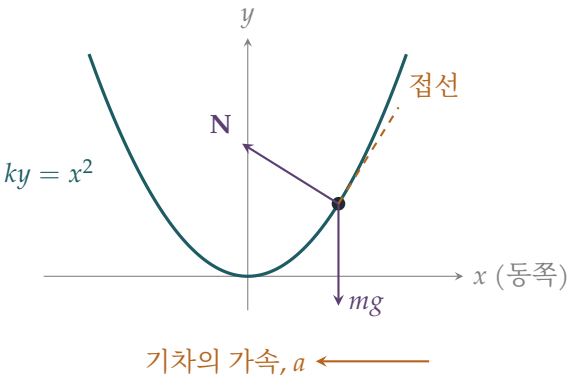
기차는 서쪽으로 가속하므로 기차의 가속도는 $-a\mathbf{i}$이다. 기차에 대한 구슬의 위치는 $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$이므로, 구슬의 실제 (지면 좌표계에서의) 가속도는

$$(\ddot{x} - a)\,\mathbf{i} + \ddot{y}\,\mathbf{j}.$$

이다. 구슬에 작용하는 힘은 무게 $-mg\mathbf{j}$와 $\mathbf{N}$뿐이므로, 뉴턴의 운동 제2법칙에 의해

$$m(\ddot{x}-a)\,\mathbf{i}+m\ddot{y}\,\mathbf{j}=\mathbf{N}-mg\,\mathbf{j}. \qquad (*)$$

이다.



소문항 (i)

구슬이 기차에 대해 원점에 머물러 있다고 가정하자. 그러면 구슬은 기차와 같은 가속도 $-a\mathbf{i}$를 가지므로, $a>0$일 때 수평 방향의 힘 $-ma\mathbf{i}$가 필요하다. 그런데 원점에서 철사 $y=x^2/k$의 기울기(gradient)는 $2x/k=0$이므로 철사는 그곳에서 수평이고, 매끄러운 철사의 수직항력은 철사에 수직, 즉 연직 방향이다. 중력도 연직 방향이다. 수평 방향으로 작용하는 힘이 없으므로 구슬은 기차와 함께 가속할 수 없고, 기차에 대해 움직여야 한다. (구슬의 실제 수평 가속도는 0인데 기차의 가속도는 서쪽으로 a이므로, 구슬은 철사를 따라 동쪽, 즉 x가 양수인 쪽으로 미끄러지기 시작한다.)

소문항 (ii)

구슬이 철사를 따라 움직이는 동안, 기차에 대한 구슬의 속도 $\dot{x}\,\mathbf{i}+\dot{y}\,\mathbf{j}$는 철사에 접한다. 철사가 기차에 고정되어 있기 때문이다. $\mathbf{N}$은 철사에 수직이므로

$$\mathbf{N}\cdot(\dot{x}\,\mathbf{i}+\dot{y}\,\mathbf{j})=0.$$

이다. $(*)$를 $m(\ddot{x}-a)\,\mathbf{i}+m(\ddot{y}+g)\,\mathbf{j}=\mathbf{N}$으로 정리하고 양변에 $\dot{x}\,\mathbf{i}+\dot{y}\,\mathbf{j}$와의 스칼라곱(scalar product)을 취한 뒤 m으로 나누면

$$\dot{x}(\ddot{x}-a)+\dot{y}(\ddot{y}+g)=0,$$

을 얻으므로 증명이 끝난다. 좌변은 어떤 식의 도함수(derivative)와 정확히 같다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-ax+gy\right)=\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}-a\dot{x}+g\dot{y}=0,$$

따라서 운동하는 동안 $\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-ax+gy$는 일정하다.

생각해 보기 지면 좌표계에서는 수직항력이 일을 하는데, 상대 속도와 내적을 취하는 것이 왜 정당한가?

지면 좌표계에서 구슬의 속도에는 철사 방향이 아닌 $-at\,\mathbf{i}$가 더해지므로, 그 좌표계에서는 $\mathbf{N}$이 일을 한다. 그러나 등식 $\mathbf{N}\cdot\mathbf{u}=0$은 순전히 기하학적인 사실이다. 이 등식은 철사에 접하는 임의의 벡터 $\mathbf{u}$에 대해 성립하며, 상대 속도는 바로 그런 벡터이다. 우리가 사용한 것은 이것뿐이다.

소문항 (iii)

처음에 $x=y=0$이고 $\dot{x}=\dot{y}=0$이므로 그 상수는 0이다. 기차에 대한 속력을 v로 쓰고 $y=x^2/k$를 이용하면

$$\tfrac{1}{2}v^2 = ax - gy = ax - \frac{gx^2}{k} = \frac{g}{k}\,x\Big(\frac{ak}{g}-x\Big). \qquad (\dagger)$$

이다. $v^2\geq 0$이므로 구슬은 $0\leq x\leq ak/g$ 범위에 갇혀 있고, $v=0$인 곳은 이 구간의 두 끝점뿐이다. 소문항 (i)에 의해 구슬은 x가 양수인 쪽으로 움직이기 시작한다. $0<x<ak/g$인 동안 속력이 양수이므로, 구슬은 $x=ak/g$에 도달할 때까지 철사를 따라 같은 방향으로 계속 움직이고, 그곳에서 순간적으로 멈춘다. (구슬은 그곳에서 실제로 되돌아온다. 그 점에서 $(*)$의 접선 방향 성분은 0이 아닌데, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ax-gx^2/k)=a-2a=-a\neq 0$이기 때문이다.) 그 뒤 구슬은 $x=0$과 $x=ak/g$ 사이를 진동(oscillate)한다.

이 구간에서 $y=x^2/k$는 x에 대해 증가하므로, 최고 높이는 $x=ak/g$에서 도달한다.

$$b=\frac{1}{k}\Big(\frac{ak}{g}\Big)^2=\frac{a^2k}{g^2}.$$

소문항 (iv)

$(\dagger)$에 의해 $v^2=2\big(ax-gx^2/k\big)$인데, 이는 x에 대한 이차식으로 두 근 0과 ak/g의 중점에서 최댓값을 가진다. 따라서 기차에 대한 속력이 가장 큰 것은

$$x=\frac{ak}{2g}.$$

일 때이다. 그곳에서

$$v^2=2\Big(\frac{a^2k}{2g}-\frac{a^2k}{4g}\Big)=\frac{a^2k}{2g}, \qquad \text{이므로} \qquad v_{\max}=a\sqrt{\frac{k}{2g}}.$$

검산

- 극한의 경우(limiting case): $a=0$이면 구슬은 그냥 철사의 바닥에 머물러 있고, 실제로 $b=0$이고 $v_{\max}=0$이다.

- 유효 중력(effective gravity): 기차 안에서 구슬은 동쪽으로 기울어진 유효 중력 $(a, -g)$를 느낀다. 운동이 가장 빠른 점 $x = ak/(2g)$는 정확히 철사의 기울기 $2x/k$가 a/g와 같아지는 곳이므로, 그곳에서 접선은 유효 중력에 수직이다. 즉 이 점은 기울어진 중력장에서 철사의 "가장 낮은 점"이다. 되돌아오는 점 $x = ak/g$는 그보다 두 배 멀리 있는데, 이는 x에 대해 이차식인 퍼텐셜(potential)에서의 대칭적인 진동과 같다.
- 차원(dimensions): k는 길이이므로 a^2k/g^2는 길이이고 $a\sqrt{k/g}$는 속력이다.
- 수치적으로, $a = 2$, $k = 1.5$, $g = 9.8$ (SI 단위)로 두고 컴퓨터로 운동을 단계별로 진행시키면 최고 높이 $0.06247\,\mathrm{m}$와 $x = 0.1531\,\mathrm{m}$에서의 최대 속력 $0.5533\,\mathrm{m\,s^{-1}}$를 얻는데, 이는 a^2k/g^2, $a\sqrt{k/(2g)}$, $ak/(2g)$와 일치한다.

흔한 실수

- 구슬의 실제 수평 가속도를 $\ddot{x}$로 쓰는 것. 이것은 기차에 대한 상대 가속도이며, 기차 자체의 가속도 $-a$를 더해야 한다.
- a의 부호를 틀리는 것: 기차는 **서쪽**으로 가속하므로, 기차 안에서 구슬은 **동쪽**, 즉 x가 양수인 쪽으로 밀린다.
- 속력이 철사의 바닥 $x = 0$에서 가장 크다고 생각하는 것. 기차 안에서는 유효한 "아래" 방향이 기울어져 있으므로, 가장 빠른 점은 대신 $x = ak/(2g)$에 있다.

STEP 너머

소문항 (ii)는 비관성 좌표계(non-inertial frame)에서의 역학을 처음 맛보는 것이다. 기차의 좌표계에서 항 $-ax$는 동쪽으로 작용하는 균일한 "가상의 힘(fictitious force)" ma에 대한 퍼텐셜 에너지처럼 작용하며, 이를 중력에 더하면 기울어진 유효 중력을 얻는다. 대학에서는 이것이 원심력(centrifugal force)과 코리올리 힘(Coriolis force)이 나타나는 회전 좌표계로, 그리고 $\mathbf{N}$과 같은 구속력(constraint force)을 처음부터 제거하는 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)으로 확장된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에는 비관성계와 가상의 힘을 다루는 좋은 장이 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.