풀이

STEP II 2021, 문제 1

순수수학 • 삼각방정식

> **STEP II 2021, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

사인과 코사인의 곱은 다루기 까다롭지만 합은 다루기 쉽다. 그래서 처음에 주어진 항등식(identity)을 이용하여 곱을 합으로 바꾼다. (i)에서는 이렇게 하면 세 개의 곱이 $\cos 2x$에 대한 삼차식(cubic)이 되고, 그 인수가 눈에 보인다. (ii)에서는 탄젠트를 없앤 뒤 각 인수를 종류가 반대인 짝과 묶으면, 방정식 전체가 간단한 두 인수의 곱으로 정리된다. 추가로 주의할 점은 탄젠트가 정의되지 않는 점들뿐이다.

풀이

항등식

두 전개식

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B, \qquad \cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

를 더하면 $\cos(A+B)+\cos(A-B) = 2\cos A\cos B$를 얻는다. $A = 3a$, $B = a$로 두면

$$\cos a\cos 3a = \tfrac{1}{2}(\cos 4a + \cos 2a),$$

이므로 요구된 식이 성립한다. 같은 방법으로 $\sin(A\pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B$를 더하면 $\sin(A+B)+\sin(A-B) = 2\sin A\cos B$를 얻는다. $A = a$, $B = 3a$로 두고 $\sin(-2a) = -\sin 2a$를 이용하면

$$\sin a\cos 3a = \tfrac{1}{2}(\sin 4a - \sin 2a).$$

(역할을 바꾸어 $A = 3a$, $B = a$로 두면 짝이 되는 식 $\cos a\sin 3a = \tfrac{1}{2}(\sin 4a + \sin 2a)$를 얻으며, 이 식도 뒤에서 필요하다.)

소문항 (i)

첫 번째 항등식에 의해 $4\cos x\cos 2x\cos 3x = 2\cos 2x\,(\cos 4x + \cos 2x)$이다. $c = \cos 2x$로 놓으면 $\cos 4x = 2c^2 - 1$이다. 방정식은

$$2c\,(2c^2 + c - 1) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 4c^3 + 2c^2 - 2c - 1 = 0.$$

이 된다. 항을 둘씩 묶으면 $2c^2(2c+1) - (2c+1) = 0$, 즉

$$(2c+1)(2c^2 - 1) = 0,$$

이므로 $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ 또는 $\cos 2x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$이다.

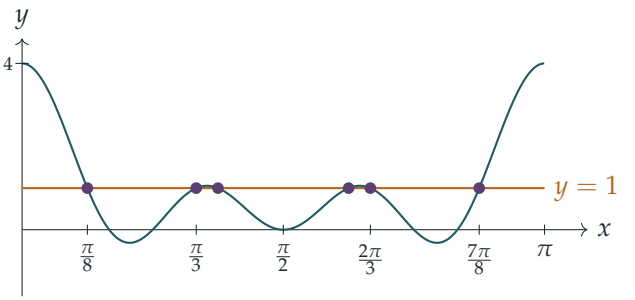
$0 \le x \le \pi$이면 $0 \le 2x \le 2\pi$이고, -1과 1 사이(양 끝 제외)에 있는 $\cos 2x$의 각 값은 이 범위에서 $2x$의 값을 두 개씩 준다.

$$\begin{aligned}
\cos 2x = -\tfrac{1}{2} &\implies 2x = \tfrac{2\pi}{3},\ \tfrac{4\pi}{3} &&\implies x = \tfrac{\pi}{3},\ \tfrac{2\pi}{3};\\
\cos 2x = \tfrac{1}{\sqrt{2}} &\implies 2x = \tfrac{\pi}{4},\ \tfrac{7\pi}{4} &&\implies x = \tfrac{\pi}{8},\ \tfrac{7\pi}{8};\\
\cos 2x = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} &\implies 2x = \tfrac{3\pi}{4},\ \tfrac{5\pi}{4} &&\implies x = \tfrac{3\pi}{8},\ \tfrac{5\pi}{8}.
\end{aligned}$$

모든 단계가 가역(reversible)이었으므로 해는

$$x = \frac{\pi}{8},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{3\pi}{8},\ \frac{5\pi}{8},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{7\pi}{8}.$$

이다. 그래프를 보면 직선 $y = 1$과 정확히 여섯 번 만남을 확인할 수 있다.



소문항 (ii)

$\tan x = \tan 2x \tan 3x \tan 4x$라 하자. 이 식이 의미를 가지려면 네 탄젠트가 모두 정의되어야 하므로 $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, $\cos 4x$는 모두 0이 아니다. 따라서 양변에 $\cos x\cos 2x\cos 3x\cos 4x$를 곱하면

$$\sin x\cos 3x \cdot \cos 2x\cos 4x = \cos x\sin 3x \cdot \sin 2x\sin 4x.$$

를 얻는다.

생각해 보기 왜 $\sin x$를 $\cos 3x$와, $\cos x$를 $\sin 3x$와 짝지을까?

바로 이 곱들이 앞의 항등식으로 합으로 바뀌는 곱이고, 두 합 모두 방정식의 다른 곳에 이미 나타나는 $\sin 4x$와 $\sin 2x$만 포함하기 때문이다. $\sin x \cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x)$와 $\cos x \sin 3x = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x)$를 이용하고 양변을 두 배 하면

$$(\sin 4x - \sin 2x)\cos 2x \cos 4x = (\sin 4x + \sin 2x)\sin 2x \sin 4x.$$

이제 좌변의 $\sin 2x \cos 2x$를 $\frac{1}{2}\sin 4x$로 바꾸면 모든 항이 인수 $\sin 4x$를 갖는다.

$$\sin 4x \cos 4x \cos 2x - \tfrac{1}{2}\sin 4x \cos 4x = \sin 4x \sin^2 2x + \sin 4x \sin 4x \sin 2x.$$

모든 항을 한쪽으로 옮기면

$$\sin 4x \left[(\cos 4x \cos 2x - \sin 4x \sin 2x) - \left(\sin^2 2x + \tfrac{1}{2}\cos 4x\right)\right] = 0.$$

첫 번째 괄호는 $\cos(4x + 2x) = \cos 6x$이다. 두 번째 괄호에서 $\sin^2 2x = \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)$이므로 $\sin^2 2x + \frac{1}{2}\cos 4x = \frac{1}{2}$이다. 따라서

$$\sin 4x \left(\cos 6x - \tfrac{1}{2}\right) = 0,$$

이므로 요구된 대로 $\cos 6x = \frac{1}{2}$ 또는 $\sin 4x = 0$이다.

이제 $0 \le x \le \pi$에서 $(\star)$의 해를 구하자.

생각해 보기 $\sin 4x(\cos 6x - \frac{1}{2}) = 0$의 모든 해가 $(\star)$의 해일까?

반드시 그렇지는 않다. 거꾸로 되돌릴 수 없을 수도 있는 단계는 코사인들을 곱한 단계뿐이고, 이 단계는 네 탄젠트가 모두 정의될 때에만 가역이다. 따라서 $(\star)$의 해는 $\sin 4x(\cos 6x - \frac{1}{2}) = 0$의 해 가운데 $\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cos 4x \neq 0$인 것들이다.

$\sin 4x = 0$인 경우. $[0, \pi]$에서 이는 $x = 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4},\ \pi$를 준다. $x = \frac{\pi}{4}$와 $x = \frac{3\pi}{4}$에서는 $\tan 2x$가 정의되지 않고, $x = \frac{\pi}{2}$에서는 $\tan x$가 정의되지 않는다. $x = 0$과 $x = \pi$에서는 모든 탄젠트가 0이고 $(\star)$는 $0 = 0$이 된다. 따라서 $x = 0$과 $x = \pi$는 해이다.

$\cos 6x = \frac{1}{2}$인 경우. 이때 $6x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$이므로 $x = \frac{(6k \pm 1)\pi}{18}$이다. $0 \le 6x \le 6\pi$이므로

$$x = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}.$$

를 얻는다. 각각은 m이 3의 배수가 아닌 $\frac{m\pi}{18}$ 꼴이다. 코사인 $\cos nx$가 0이 되는 것은 nx가 $\frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{18}$의 홀수 배일 때뿐이고, 그러려면 $9 \mid nm$이어야 한다. $3 \nmid m$이므로 $9 \mid n$이어야 하는데, $n \in \{1, 2, 3, 4\}$에 대해서는 불가능하다. 따라서 네 탄젠트가 모두 정의되며 이 여섯 값은 모두 해이다.

종합하면 $(\star)$는 $0 \le x \le \pi$에서 여덟 개의 해를 갖는다.

$$x = 0,\ \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18},\ \pi.$$

검산

- (i)에서 $x = \frac{\pi}{8}$일 때: $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$이고 $\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$이므로, 곱은 $4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = 1$이다.
- (ii)에서 $x = \frac{\pi}{18} = 10°$일 때: $\tan 10° \approx 0.17633$이고, $\tan 20° \tan 30° \tan 40° \approx 0.36397 \times 0.57735 \times 0.83910 \approx 0.17633$이다.
- 컴퓨터로 $[0, \pi]$에서 두 방정식을 조사하면 각각 정확히 여섯 개와 여덟 개의 해가 위의 값에서 나타난다.

흔한 실수

- (ii)에서 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$를 해로 남겨 두는 것: 이 값들은 $\sin 4x = 0$을 만족하지만 $(\star)$의 탄젠트 하나를 정의되지 않게 만든다.
- $x = 0$과 $x = \pi$를 빠뜨리거나, 각 주기에서 $2x$(또는 $6x$)의 두 번째 값을 놓치는 것.
- 정리하는 도중에 $\sin 4x$로 나누어, 문제에서 찾으라고 한 인수를 잃어버리는 것.

STEP 너머

곱을 합으로 바꾸는 공식(product-to-sum formulae)은 $e^{iA}e^{iB} = e^{i(A+B)}$가 실변수 세계에 드리운 그림자이다. $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$로 쓰면 코사인의 어떤 곱이든 합으로 바뀌는데, 이는 함수를 $\cos nx$와 $\sin nx$의 합으로 전개하는 푸리에 급수(Fourier series)로 가는 첫걸음이다. (ii)에 숨어 있는 놀라운 항등식 $\tan 10° = \tan 20° \tan 30° \tan 40°$는 삼각함수 값을 단위근(roots of unity)으로 바라볼 때 나타나는 전형적인 놀라움이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이 관점을 아름답게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.