풀이

STEP III 2020, 문제 9

역학 • 강체의 평형

STEP III 2020, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

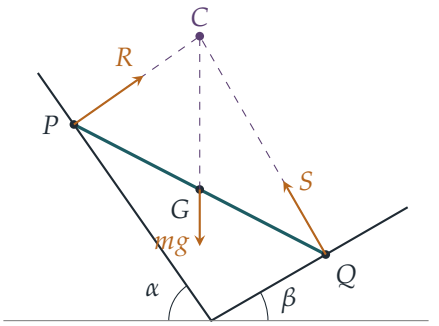
www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

막대는 정확히 세 힘으로 지탱된다. 중심에 작용하는 무게, 그리고 양 끝에 하나씩 작용하는 접촉력이다. 평행하지 않은 세 힘을 받아 평형(equilibrium) 상태에 있는 물체에서는 세 힘의 작용선(line of action)이 한 점에서 만난다. 따라서 문제 전체가 기하 문제가 된다. 그 교점의 높이를 두 가지 방법으로 구하여 같다고 놓으면 된다. 소문항 (ii)에서는 Q에서의 수직항력(normal reaction)과 한계 마찰력(limiting friction)을 합하면 마찰각(angle of friction) λ만큼 기울어진 하나의 전체 반력이 되며, 여기서 $\tan\lambda = \mu$이다. 그러면 β를 $\beta + \lambda$로 바꾸어 같은 기하를 적용할 수 있다.

풀이

막대를 길이 $2l$, 중심 G인 균일한 강체(rigid body)로, 두 평면을 고정된 것으로 모형화한다. 두 평면이 만나는 직선의 왼쪽에 Π_1, 오른쪽에 Π_2를 두면, P는 왼쪽에 있으며 더 높고, Q는 오른쪽에 있으며 더 낮다.



소문항 (i)

두 평면이 모두 매끄러우므로(smooth) P에서의 반력 R는 Π_1에 수직이고, Q에서의 반력 S는 Π_2에 수직이다. 기울기 α인 평면에 수직인 직선은 연직선과 각 α를 이룬다. 따라서 R의 작용선은 P에서 위쪽 연직 방향과 각 α를 이루며 Q 쪽으로 기울어져 올라가고, S의 작용선은 Q에서 위쪽 연직 방향과 각 β를 이루며 P 쪽으로 기울어져 올라간다.

막대는 세 힘 R, S, 그리고 G를 지나 연직으로 작용하는 무게 mg를 받아 평형 상태에 있다. R와 S의 작용선이 만나는 점 C에 대한 모멘트(moment)를 취하면 R와 S의 모멘트는 0이므로 무게의 모멘트도 0이어야 한다. 즉 무게의 작용선은 C를 지난다. 따라서 C는 G의 연직 위에 있다.

> **생각해 보기** "C가 G의 바로 위에 있다"는 사실을 어떻게 식으로 바꿀 수 있을까?

Q로부터 C까지의 높이를 두 경로로 계산한다. G는 중점이고 막대가 수평선과 각 θ를 이루므로, G는 양 끝에서 각각 수평 거리 $l\cos\theta$만큼 떨어져 있고, P는 Q보다 $2l\sin\theta$만큼 높다.

- R의 작용선을 따라: 연직선과 각 α를 이루는 직선을 따라 수평 거리 $l\cos\theta$만큼 이동하면 높이가 $l\cos\theta\cot\alpha$만큼 올라간다. 따라서 C는 Q보다 $2l\sin\theta + l\cos\theta\cot\alpha$만큼 높다.
- S의 작용선을 따라: 같은 방법으로 C는 Q보다 $l\cos\theta\cot\beta$만큼 높다.

두 값을 같다고 놓고 $l\cos\theta \neq 0$으로 나누면

$$2\tan\theta + \cot\alpha = \cot\beta, \qquad \text{즉} \qquad 2\tan\theta = \cot\beta - \cot\alpha,$$

이고, 이것이 구하는 결과이다. $\beta < \alpha$이고 (둘 다 예각) $\cot\beta > \cot\alpha$이므로 $\theta > 0$이며, 이는 P가 Q보다 높다는 사실과 일치한다.

소문항 (ii)

이제 Π_1은 여전히 매끄러우므로 P에서의 반력은 앞과 똑같다. Q에서는 수직항력 N과 Π_2를 따르는 마찰력 F가 작용한다.

마찰력의 방향. 막대는 강체이므로 P와 Q의 속도는 막대 방향 성분이 같다. P가 속력 u로 Π_1을 따라 미끄러져 내려가기 시작하고 Q가 (부호가 있는) 속력 w로 Π_2를 따라 올라간다고 하자. 수평선 아래로 각 ϕ를 이루는 P에서 Q로의 막대 방향으로 분해하면

$$u\cos(\alpha - \phi) = w\cos(\beta + \phi).$$

여기서 $\cos(\alpha - \phi) > 0$이고, 아래에서 $\phi + \beta < \frac{1}{2}\pi$임을 보일 것이므로 $w > 0$이다. 즉 Q는 Π_2를 따라 **올라가려** 한다. 마찰력은 이를 방해하므로 F는 Π_2를 따라 아래쪽으로 작용하고, 평형이 한계 상태이므로 $F = \mu N$이다.

전체 반력. N과 F를 하나의 힘 S'로 합친다. 이 힘은 법선과 각 λ를 이루며, 여기서 $\tan\lambda =$

$F/N = \mu$이다. 또한 F가 평면 아래쪽(두 평면이 만나는 직선 쪽)을 향하므로, 반력은 P 쪽으로 더 기울어진다. 따라서 S'의 작용선은 Q에서 위쪽 연직 방향과 각 $\beta + \lambda$를 이루며 P 쪽으로 기울어져 올라간다. ($\beta + \lambda > \frac{1}{2}\pi$이면 이 직선은 실제로는 내려가지만, 아래의 높이 공식은 코탄젠트가 음수인 채로 여전히 성립한다.)

막대는 다시 세 힘을 받아 평형 상태에 있으므로 세 작용선은 G 위의 한 점에서 만나고, 소문항 (i)의 논증이 θ를 ϕ로, β를 $\beta + \lambda$로 바꾸어 그대로 적용된다.

$$2\tan\phi = \cot(\beta + \lambda) - \cot\alpha.$$

이로부터 $2\tan\phi < \cot\beta$이므로 $\tan\phi < \cot\beta = \tan(\frac{1}{2}\pi - \beta)$이고 $\phi + \beta < \frac{1}{2}\pi$이다. 이는 앞에서 가정한 마찰력의 방향이 옳음을 확인해 준다.

$2\tan\theta = \cot\beta - \cot\alpha$에서 빼면

$$2(\tan\theta - \tan\phi) = \cot\beta - \cot(\beta + \lambda) = \frac{\sin(\beta + \lambda)\cos\beta - \cos(\beta + \lambda)\sin\beta}{\sin\beta\,\sin(\beta + \lambda)}$$
$$= \frac{\sin\lambda}{\sin\beta\,(\sin\beta\cos\lambda + \cos\beta\sin\lambda)}.$$

분자와 분모를 $\cos\lambda$로 나누고 $\tan\lambda = \mu$를 이용한 다음 $\cos\beta$를 묶어 내면

$$2(\tan\theta - \tan\phi) = \frac{\mu}{\sin\beta\,(\sin\beta + \mu\cos\beta)} = \frac{\mu}{\sin\beta\cos\beta\,(\tan\beta + \mu)} = \frac{2\mu}{(\mu + \tan\beta)\sin 2\beta}.$$

양변을 반으로 나누면

$$\tan\theta - \tan\phi = \frac{\mu}{(\mu + \tan\beta)\sin 2\beta},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

검산

- $\mu = 0$이면 우변이 0이므로 $\phi = \theta$이다. 마땅히 그래야 하듯 소문항 (ii)가 소문항 (i)로 돌아간다.
- 우변이 양수이므로 $\phi < \theta$이다. 마찰 덕분에 막대는 매끄러운 평면에서보다 더 평평하게 놓일 수 있으며, P가 미끄러져 내려가려는 끝이라는 점을 생각하면 이는 타당하다.
- $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$로 놓자. 그러면 $2\tan\theta = \sqrt{3} - 1/\sqrt{3} = 2/\sqrt{3}$이므로 $\theta = 30°$이다. $\mu = 0.5$일 때 공식은 $\tan\phi = 0.5774 - 0.5/(1.0774 \times 0.8660) \approx 0.0415$를 주므로 $\phi \approx 2.4°$이다. 이 값들에 대해 수평 방향 분해, 연직 방향 분해, G에 대한 모멘트의 방정식을 직접 풀어도 (컴퓨터로 확인했으며, 무작위로 고른 수천 가지 각과 계수에 대해 반복했다) 같은 ϕ를 얻는다.
- 어떤 μ든 $2\tan\phi = \cot(\beta + \lambda) - \cot\alpha$를 이용하면 빠르게 확인할 수 있다. 이 경우 $\lambda \approx 26.57°$, $\cot 56.57° \approx 0.6606$이고 $(0.6606 - 0.5774)/2 \approx 0.0416$이므로 반올림 오차 범위에서 일치한다.

흔한 실수

- 마찰력을 Π_2를 따라 위쪽으로 잡는 실수. P가 미끄러져 내려가면 막대의 길이 때문에 Q는 자기 평면을 따라 **올라가야** 하므로, Q에서의 마찰력은 평면 아래쪽으로 작용한다.
- 반력의 각을 연직선이 아니라 수평선으로부터 재는 실수. 기울기 α인 평면의 법선은 **연직선**과 각 α를 이룬다.

STEP 너머

여기서 사용한 세 힘의 공점(concurrency) 조건은 강체 평형의 일반 조건, 즉 합력이 0이고 임의의 점에 대한 합모멘트가 0이라는 조건의 특수한 경우이다. 마찰력과 수직항력을 반꼭지각 λ인 "마찰 원뿔(cone of friction)"로 합쳐 생각하는 것은 공학자들이 사다리, 쐐기, 나사의 안정성을 따지는 방식이며, 마찰력의 방향을 정하는 속도 논증은 순간 회전 중심(instantaneous centre of rotation)이라는 개념에 해당한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 강체 정역학과 마찰을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.