풀이

STEP III 2020, 문제 8

순수수학 • 수열과 무한 강하법

STEP III 2020, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 1.8 절 **유리수 세기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch01/counting-rationals.html

핵심 아이디어

첨자가 큰 항은 모두 첨자가 그 절반 정도인 항들로부터 만들어진다. 따라서 쌍 (u_n, u_{n+1})에 관한 어떤 주장이든 첨자가 더 작은 쌍으로 되돌려 보낼 수 있고, **강하법**(descent)에 의한 논증(동치로, 가장 작은 반례(counterexample)를 고르는 논증)이 모든 소문항에서 제 역할을 한다. 처음 몇 항을 적어 보고, 연속한 각 쌍이 어떻게 새로운 두 쌍을 만들어 내는지 써 보면 증명에 앞서 패턴이 눈에 들어온다.

풀이

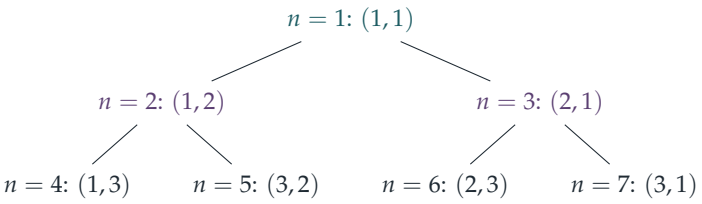
처음 열여섯 개의 항은 다음과 같다.

$$1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 1,\ 4,\ 3,\ 5,\ 2,\ 5,\ 3,\ 4,\ 1.$$

모든 항은 양의 정수이다. 이는 u_1에 대해 성립하고, 그 뒤의 각 항은 앞선 항 하나이거나 앞선 두 항의 합이므로 (강한) 수학적 귀납법(strong induction)에 의해 따라 나온다.

한 쌍이 뒤의 쌍들을 어떻게 만들어 내는지 적어 둘 만하다. $(u_k, u_{k+1}) = (a, b)$이면 정의로부터 바로

$$(u_{2k}, u_{2k+1}) = (a,\ a+b), \qquad (u_{2k+1}, u_{2k+2}) = (a+b,\ b). \tag{$*$}$$



위치 n의 쌍은 (u_n, u_{n+1})이다. $(*)$에 의해 그 왼쪽 자식은 위치 $2n$에, 오른쪽 자식은 위치 $2n+1$에 있다. 위치 $n \geq 2$의 모든 쌍은 정확히 이런 방식으로 위치 $\lfloor n/2 \rfloor$의 쌍으로부터 생겨난다.

소문항 (i)

$n \geq 2$인 연속한 쌍 (u_n, u_{n+1})을 잡고, $k = \lfloor n/2 \rfloor \geq 1$이라 하자.

- $n = 2k$이면 쌍은 $(u_k,\ u_k + u_{k+1})$이다. $u_{k+1} \geq 1$이므로 홀수 첨자 항 $u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}$이 짝수 첨자 항 $u_{2k} = u_k$보다 크다.
- $n = 2k+1$이면 쌍은 $(u_k + u_{k+1},\ u_{k+1})$이다. 이번에는 $u_k \geq 1$이므로 $u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}$이 $u_{2k+2} = u_{k+1}$보다 크다.

따라서 첫 번째 쌍 $(u_1, u_2) = (1,1)$을 제외한 모든 쌍에서 홀수 첨자 항이 순증가적으로 더 크다. 특히 **쌍의 두 항이 같은 것은 첫 번째 쌍뿐이다.**

소문항 (ii)

$d > 1$이 u_n과 u_{n+1}을 모두 나눈다고 하자. $u_1 = u_2 = 1$이므로 $n = 1$에서는 이런 일이 일어날 수 없고, 따라서 $n \geq 2$이다. $k = \lfloor n/2 \rfloor$라 하면 $1 \leq k < n$이다.

- $n = 2k$인 경우: $d \mid u_{2k} = u_k$이고 $d \mid u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}$이므로, d는 그 차 u_{k+1}을 나눈다.
- $n = 2k+1$인 경우: $d \mid u_{2k+2} = u_{k+1}$이고 $d \mid u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}$이므로 $d \mid u_k$이다.

어느 경우든 d는 더 앞의 연속한 쌍인 u_k와 u_{k+1}을 모두 나누며, 이것이 보여야 할 내용이었다.

이제 어떤 연속한 쌍이 공약수 $d > 1$을 가진다고 하고, 그러한 쌍 (u_n, u_{n+1}) 가운데 n이 가장 작은 것을 고르자. 위에서처럼 $n \neq 1$이고, 방금 한 논증은 같은 공약수를 가지는 위치 $k < n$의 쌍을 만들어 내므로 n의 최소성에 모순이다. 따라서 연속한 두 항은 언제나 서로소(co-prime)이다.

소문항 (iii)

어떤 순서쌍 (a, b)가 서로 다른 두 위치에서 나타난다고 하자. 즉 $m < n$에 대해 $(u_m, u_{m+1}) = (u_n, u_{n+1}) = (a, b)$이다. 이러한 모든 반복 가운데 m이 가장 작은 것을 고르자.

$m = 1$이면 $a = b = 1$이다. 그런데 $n \geq 2$이고, 소문항 (i)에 의해 위치 n의 쌍은 두 항이 다르다. 따라서 $m \geq 2$이고, 그러면 소문항 (i)에 의해 $a \neq b$이기도 하다.

? **생각해 보기** a와 b만 보고 위치가 홀수인지 짝수인지 어떻게 알 수 있을까?

소문항 (i)에 따르면 쌍에서 더 큰 항이 홀수 첨자를 가지므로, 위치의 홀짝성(parity)은 쌍 자체로 결정된다.

- $a < b$이면 두 번째 항이 홀수 첨자를 가지므로 m과 n은 모두 짝수이다. 즉 $j < k$인 $m = 2j, n = 2k$이다. 그러면 $u_j = u_{2j} = a$이고 $u_{j+1} = u_{2j+1} - u_j = b - a$이며, 마찬가지로 $(u_k, u_{k+1}) = (a, b - a)$이다.
- $a > b$이면 m과 n은 모두 홀수이다. 즉 $1 \leq j < k$인 $m = 2j + 1, n = 2k + 1$이다. 그러면 $u_{j+1} = u_{2j+2} = b$이고 $u_j = u_{2j+1} - u_{j+1} = a - b$이며, 마찬가지로 $(u_k, u_{k+1}) = (a - b, b)$이다.

두 경우 모두 하나의 순서쌍이 서로 다른 두 위치 j와 k에서 나타나고, $j \leq m/2 < m$이다. 이는 m의 선택에 모순이다. 따라서 양의 정수의 어떤 순서쌍도 서로 다른 두 곳에서 연속하여 나타나지 않는다.

소문항 (iv)

$a > b$이고 a, b가 서로소이며, (a, b)가 수열의 연속한 쌍이 아니라고 하자. 그러면 $a - b$와 b는 양의 정수이고 서로소이다. $a - b$와 b의 공약수는 $(a - b) + b = a$도 나누므로 a와 b의 공약수이고, 따라서 1이어야 하기 때문이다.

만약 어딘가에서 $a - b$ 바로 다음에 b가 온다면, 예컨대 $(u_k, u_{k+1}) = (a - b, b)$라면, $(*)$에 의해

$$(u_{2k+1}, u_{2k+2}) = \big((a - b) + b,\ b\big) = (a, b),$$

이고, 이는 (a, b)에 대한 가정에 모순이다. 따라서 $(a - b, b)$ 역시 연속하여 나타나지 않는 서로소 쌍이며, 그 합은 $a < a + b$이다.

$a < b$인 경우의 비슷한 결과는 다음과 같다. **a와 $b - a$는 서로소인 양의 정수이고, a 바로 다음에 $b - a$가 오는 방식으로 연속하여 나타나지 않으며, 그 합 b는 $a + b$보다 작다.** 증명도 같다. a와 $b - a$의 공약수는 $a + (b - a) = b$를 나누고, $(u_k, u_{k+1}) = (a, b - a)$이면 $(u_{2k}, u_{2k+1}) = (a,\ a + (b - a)) = (a, b)$이다.

소문항 (v)

모든 항이 양의 정수이므로 $f(n) = u_n/u_{n+1}$은 양의 유리수이고, 따라서 치역(range)은 양의 유리수 전체에 포함된다. 모든 양의 유리수가 값으로 나타나며, 단 한 번만 나타난다는 것을 보이자.

모든 양의 유리수는 치역에 속한다. 양의 유리수를 기약분수로 p/q라 쓰자. 여기서 p, q는 서로소인 양의 정수이다. 모든 서로소 쌍 (p,q)가 어떤 n에 대해 (u_n, u_{n+1})으로 나타난다고 주장한다. 그렇지 않다면 나타나지 않는 서로소 쌍 가운데 $a+b$가 가장 작은 것 (a,b)를 고르자. $a = b$일 수는 없다. 그러면 서로소 조건에 의해 $a = b = 1$이어야 하는데, $(1,1)$은 $n = 1$에서 나타나기 때문이다. 따라서 $a > b$ 또는 $a < b$이고, 소문항 (iv)는 나타나지 않으면서 합이 더 작은 서로소 쌍을 제공한다. 이는 최소성에 모순이므로 모든 서로소 쌍 (p,q)가 나타나며, 그 위치를 n이라 하면 $f(n) = p/q$이다.

f는 일대일(*one-to-one*)이다. $f(m) = f(n)$이라 하자. 소문항 (ii)에 의해 u_m/u_{m+1}과 u_n/u_{n+1}은 모두 분모가 양수인 기약분수이다. 양의 유리수의 이러한 표현은 하나뿐이므로 $u_m = u_n$이고 $u_{m+1} = u_{n+1}$이다. 소문항 (iii)에 의해 같은 순서쌍이 서로 다른 두 곳에서 나타날 수 없으므로 $m = n$이다.

따라서 f는 양의 정수 전체에서 양의 유리수 전체로의 전단사 함수(bijection)이고, 그러므로 역함수(inverse) f^{-1}을 가진다. 기약분수 p/q가 주어지면 $f^{-1}(p/q)$는 p 바로 다음에 q가 오는 유일한 위치이다. 예를 들어 3 다음에 5가 오는 곳은 위치 10뿐이므로 $f^{-1}(\frac{3}{5}) = 10$이다.

검산

- 나열한 항들로부터 쌍 $(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,2), (2,3), (3,1), (1,4), \ldots$를 얻는다. 첫 번째 쌍 이후로는 홀수 첨자 항이 더 크고, 모든 쌍이 서로소이며, 반복되는 쌍이 없다.
- 소문항 (iv)의 강하를 3/5에 적용하면 $(3,5) \to (3,2) \to (1,2) \to (1,1)$이다. $(*)$를 써서 거슬러 올라가면, 위치 1의 $(1,1)$로부터 위치 2의 $(1,2)$, 위치 5의 $(3,2)$, 위치 10의 $(3,5)$를 얻는다. 실제로 $u_{10} = 3$, $u_{11} = 5$이다.
- 처음 이백만 개의 항에 대한 컴퓨터 검사로 소문항 (i)–(iii)을 확인했고, $p + q \leq 21$인 모든 서로소 쌍 (p,q)가 정확히 한 번씩 나타남을 확인했다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)와 (iii)에서 첫 번째 쌍 $(1,1)$을 따로 배제하는 것을 잊는 실수. 이 쌍은 각 강하 논증의 기본 단계이다.

- 소문항 (iii)에서 두 위치의 홀짝성이 같다고 근거 없이 가정하는 실수. 바로 소문항 (i)이 이를 강제한다.
- 소문항 (v)에서 치역이 양의 유리수 전체라는 것만 증명하는 실수. 역함수가 존재하려면 f가 일대일이어야 하며, 이를 위해서는 소문항 (ii)와 (iii)을 함께 써야 한다.

STEP 너머

이것은 슈테른(Stern)의 이원자 수열(diatomic sequence)이며, u_n/u_{n+1}을 나열하면 유리수의 Calkin–Wilf 열거를 얻는다. 이는 $\mathbb{N}$과 $\mathbb{Q}^+$ 사이의 명시적인 전단사 함수로, 유리수 전체가 가산(countable)임을 구체적으로 보여 준다. 소문항 (iv)와 (v)의 강하는 유클리드(Euclid) 호제법(Euclid's algorithm)의 뺄셈 형태이고, 트리에서 $(1,1)$부터 (p,q)까지의 경로는 p/q의 연분수(continued fraction)를 담고 있다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 정수론)은 유클리드 호제법과 연분수를 아름답게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.