풀이

STEP III 2020, 문제 7

순수수학 • 2계 미분방정식

> **STEP III 2020, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

소문항 (i)은 2계 선형 방정식(second-order linear equation)을 때로는 두 개의 1계 선형 방정식으로 **인수분해**(factorise)할 수 있고, 각각은 적분인자(integrating factor)로 풀 수 있음을 보여 준다. 소문항 (ii)에서 할 일은 그 인수분해를 찾는 것이다. 계수를 비교하면 g에 대한 비선형 1계 방정식이 나오고, 거듭제곱 꼴을 추측하면 이를 풀 수 있다. 그 다음에는 초기 조건을 차례로 써 가며 두 1계 방정식을 순서대로 풀기만 하면 된다.

풀이

소문항 (i)

두 번째 방정식으로부터 u를 y로 나타내면

$$u = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{g}(x)\, y.$$

이다. $\mathrm{g}(x)y$에 곱의 미분법(product rule)을 써서 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \mathrm{g}'(x)\, y + \mathrm{g}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

이다. 두 식을 모두 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \mathrm{f}(x)u = \mathrm{h}(x)$에 대입하면

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \mathrm{g}'(x)\, y + \mathrm{g}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{f}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)\, y = \mathrm{h}(x),$$

이고, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$항과 y항을 각각 모으면 정확히 방정식 (1)이 된다.

소문항 (ii)

g에 대한 방정식. (2)를 (1)과 비교하면 다음이 필요하다.

$$\mathrm{g}(x)+\mathrm{f}(x)=1+\frac{4}{x},\qquad \mathrm{g}'(x)+\mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)=\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2},\qquad \mathrm{h}(x)=4x+12.$$

첫 번째 식에서 $\mathrm{f}=1+\frac{4}{x}-\mathrm{g}$이고, 이를 두 번째 식에 넣으면 f가 소거된다.

$$\mathrm{g}'(x)+\Big(1+\frac{4}{x}\Big)\mathrm{g}(x)-(\mathrm{g}(x))^2=\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}.$$

이것이 구하는 g에 대한 1계 방정식이다.

거듭제곱 꼴의 해. $\mathrm{g}(x)=kx^n$이라 하면 좌변은

$$knx^{n-1}+kx^n+4kx^{n-1}-k^2x^{2n}.$$

이다.

? **생각해 보기** k를 알기 전에 n을 어떻게 정할 수 있을까?

x의 거듭제곱을 살펴보자. 우변에는 x^{-1}과 x^{-2}만 있으므로, x^n, x^{n-1}, x^{2n}은 이 두 거듭제곱만 만들어야 한다. $n=-1$로 택하면 된다. 이때 $x^n=x^{-1}$이고, x^{n-1}과 x^{2n}은 둘 다 x^{-2}이다. 좌변은

$$\frac{k}{x}+\frac{-k+4k-k^2}{x^2}=\frac{k}{x}+\frac{3k-k^2}{x^2}.$$

이 된다. x^{-1}항을 비교하면 $k=2$이고, 그러면 $3k-k^2=6-4=2$이므로 x^{-2}항도 일치한다. 따라서

$$n=-1,\quad k=2:\qquad \mathrm{g}(x)=\frac{2}{x},\qquad \mathrm{f}(x)=1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x}=1+\frac{2}{x}.$$

(2) 풀기. 소문항 (i)에 의해 이제 (2)는 다음 두 방정식의 쌍과 동치이다.

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\Big(1+\frac{2}{x}\Big)u=4x+12,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2}{x}y=u.$$

조건이 $x=1$에서 주어지므로 $x>0$에서 다룬다.

u에 대한 방정식. 적분인자는 $\exp\int(1+\frac{2}{x})\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x+2\ln x}=x^2\mathrm{e}^x$이므로

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2\mathrm{e}^xu)=(4x^3+12x^2)\,\mathrm{e}^x.$$

이다. 우변은 (곱의 미분법에 의해) 정확히 $4x^3\mathrm{e}^x$의 도함수이므로

$$x^2\mathrm{e}^xu=4x^3\mathrm{e}^x+C,\qquad u=4x+\frac{C\mathrm{e}^{-x}}{x^2}.$$

이다. $x = 1$에서의 u의 값은 초기 조건(initial condition)에서 얻는다. $u = y' + \frac{2}{x}y = -3 + 2 \times 5 = 7$이다. 따라서 $4 + Ce^{-1} = 7$이므로 $C = 3e$이고

$$u = 4x + \frac{3e^{1-x}}{x^2}.$$

이다.

y에 대한 방정식. 적분인자는 $e^{2\ln x} = x^2$이므로

$$\frac{d}{dx}(x^2 y) = x^2 u = 4x^3 + 3e^{1-x}, \qquad \text{따라서} \qquad x^2 y = x^4 - 3e^{1-x} + D.$$

이다. $x = 1$에서 $5 = 1 - 3 + D$이므로 $D = 7$이다. 그러므로

$$\boxed{y = x^2 + \frac{7 - 3e^{1-x}}{x^2}}.$$

여기서 $y(1) = 5$를 썼고 C를 구할 때 $y'(1) = -3$을 썼으므로, 두 조건이 모두 성립한다.

검산

- $x = 1$에서 $y = 1 + 7 - 3 = 5$이다. 미분하면 $y' = 2x - 14x^{-3} + 3e^{1-x}x^{-2} + 6e^{1-x}x^{-3}$이고, $x = 1$에서 이 값은 $2 - 14 + 3 + 6 = -3$이다.
- 특수해 부분 $y = x^2$는 그것만으로 (2)를 만족해야 한다. $2 + (1 + \frac{4}{x})2x + (\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2})x^2 = 2 + 2x + 8 + 2x + 2 = 4x + 12$이므로 실제로 만족한다.
- 상자 안의 y를 $x = 0.3$과 $x = 5$ 사이의 여러 점에서 컴퓨터로 (2)에 대입해 보면, 두 변은 수치 미분의 오차(약 10^{-5}) 범위 안에서 일치한다.

흔한 실수

- $y'(1) = -3$을 그대로 u의 초깃값으로 쓰는 것. u의 초깃값은 -3이 아니라 $y' + gy = 7$이다.
- 소문항 (i)에서 $g'(x)$항을 빠뜨리는 것. g는 x에 의존하므로 gy는 곱의 미분법으로 미분해야 한다.
- 두 단계 중 하나에서 적분상수를 빠뜨리는 것. 적분상수는 두 개이며, 이는 두 개의 초기 조건과 맞아떨어진다.

STEP 너머

이것은 미분 연산자(differential operator)를 인수분해한다는 아이디어이다. 즉 $(D + f)(D + g)y = h$이고, 여기서 D는 d/dx를 뜻한다. g가 x에 의존하므로 두 인수는 교환

되지 않으며, 그래서 교차항 g'이 나타난다. 우리가 g에 대해 찾은 방정식은 **리카티 방정식**(Riccati equation)이다. 리카티 방정식은 비선형이지만, 이 문제에서처럼 알려진 해 하나만 있으면 선형 2계 문제를 두 개의 1계 문제로 줄일 수 있다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 적분인자, 계수 낮추기(reduction of order), 리카티 방정식을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.