풀이

# STEP III 2020, 문제 6

순수수학 • 극곡선과 넓이

> **STEP III 2020, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

## 핵심 아이디어

세 소문항은 모두 같은 함수 $\cos\theta + \sqrt{\cos 2\theta}$를 바탕으로 한다. $C_2$의 방정식은 $r$에 대한 이차방정식(quadratic)이고, 그 두 근은 $\cos\theta \pm \sqrt{\cos 2\theta}$이다. 따라서 $C_2$는 $C_1$(큰 근)에 두 번째 안쪽 가지(branch)(작은 근)를 합친 것이며, 두 가지는 판별식(discriminant) $\cos 2\theta$가 0이 되는 곳에서 만난다. 이것을 알고 나면 $r_+^2 - r_-^2$가 인수분해되기 때문에 두 가지 사이의 넓이는 하나의 적분으로 정리된다.

## 풀이

### 소문항 (i)

$y = \cos x + \sqrt{\cos 2x}$라 하자. 이 값은 정확히 $\cos 2x \geq 0$일 때 실수이며, 주어진 구간에서 이는 $[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ 전체이다. 이 함수는 우함수(even function)이므로 그래프는 $y$축에 대하여 대칭이다.

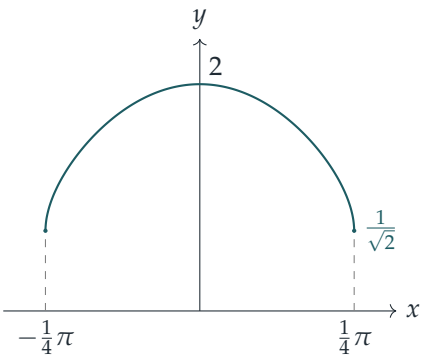
**함숫값.** $x = 0$에서 $y = 2$이다. $x = \pm\frac{1}{4}\pi$에서는 $\cos 2x = 0$이므로 $y = \cos\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$이다.

**기울기.** $0 < x < \frac{1}{4}\pi$에서는 두 항이 모두 음수이므로

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\sin x - \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}} < 0,$$

이다. 따라서 $x$가 0에서 $\frac{1}{4}\pi$까지 갈 때 $y$는 2에서 $\frac{1}{\sqrt{2}}$까지 감소하고, 최댓값은 $(0, 2)$에서 나타난다. $x \to \frac{1}{4}\pi^-$일 때 $\sin 2x \to 1$인 반면 $\sqrt{\cos 2x} \to 0^+$이므로 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \to -\infty$이다. 즉 곡선은 **연직** 접선(vertical tangent)을 가지며 양 끝점에 도달한다.

**$x = 0$ 근처.** $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$와 $\sqrt{\cos 2x} \approx \sqrt{1 - 2x^2} \approx 1 - x^2$를 이용하면 $y \approx 2 - \frac{3}{2}x^2$를 얻는다. 이는 매끄러운 극대이다.




**소문항 (ii)**

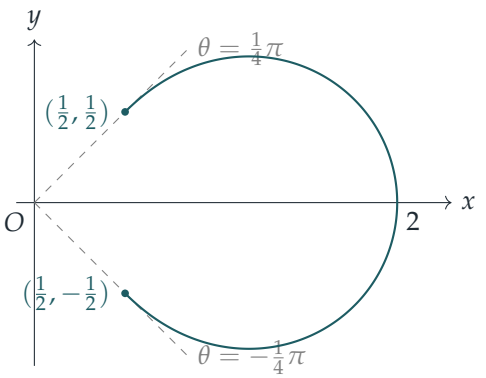
이제 같은 함수가 방향 $\theta$에서 원점까지의 거리 $r$를 나타낸다. $C_1$의 끝점은 $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\theta = \pm\frac{1}{4}\pi$인 점이며, 직교좌표로는 $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$이다. $\theta = 0$에서 곡선은 $(2, 0)$에 있으며, 이는 $O$에서 가장 먼 점이다. $r$가 $\theta$에 대한 우함수이므로 $C_1$은 시초선(initial line)에 대하여 대칭이다.

**생각해 보기** 극곡선에서 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$가 무한대라는 것은 무엇을 뜻하는가?

소문항 (i)에서 $\theta \to \frac{1}{4}\pi^-$일 때 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta \to -\infty$이다. 그 끝 근처에서는 $\theta$가 거의 변하지 않는 동안 $r$가 크게 변하므로, 곡선은 동경 직선 $\theta = \frac{1}{4}\pi$(직선 $y = x$)를 따라 움직인다. $r$가 감소하므로 곡선은 $y = x$를 따라 원점 **쪽으로** 향하면서 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$에 도달한다. 특히 높이 $y = r\sin\theta$는 끝점에 이르기 전에 최댓값에 도달해야 한다. 실제로

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta$$

는 $\theta = 0$ 근처에서 양수이고 $\theta \to \frac{1}{4}\pi$일 때 $-\infty$로 간다. (최대 높이는 약 0.81이며, $\theta \approx 34°$에서 나타난다.) 따라서 $C_1$은 $(2, 0)$을 지나는 아치 모양으로, $y = \frac{1}{2}$보다 위로 불룩 솟았다가 다시 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$로 내려와 그곳에서 직선 $y = x$에 접하며, 축 아래에는 이와 대칭인 모양이 있다.



### 소문항 (iii)

**두 가지.** 방정식을 $r$에 대한 이차방정식으로 보자.

$$r^2 - 2r\cos\theta + \sin^2\theta = 0 \iff r = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = \cos\theta \pm \sqrt{\cos 2\theta}.$$

$r_\pm = \cos\theta \pm \sqrt{\cos 2\theta}$라 쓰자. 바깥 가지 $r_+$는 정확히 $C_1$이다. 안쪽 가지는 $\cos^2\theta \geq \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$이므로 $r_- \geq 0$을 만족하며, 등호는 $\sin\theta = 0$일 때만 성립한다. 따라서 $r_-$는 진짜 극곡선(polar curve)이며, 원점에는 $\theta = 0$에서만 도달한다.

**$\theta = \pm\frac{1}{4}\pi$에서.** 여기서는 $\cos 2\theta = 0$이므로 이차방정식은 중근(repeated root)

$$r = \cos\tfrac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

을 가진다. 두 가지 모두 $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$를 지난다.

**$r$가 작을 때.** $r$가 작으면 $r^2$은 $2r\cos\theta$에 비해 무시할 수 있고, $\sin^2\theta = 2r\cos\theta - r^2$이 작으므로 $\theta$도 작아야 한다. 그러면 $2r\cos\theta \approx \sin^2\theta$이고, $\cos\theta \approx 1$, $\sin\theta \approx \theta$를 이용하면

$$r \approx \frac{\sin^2\theta}{2\cos\theta} \approx \tfrac{1}{2}\theta^2,$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다. (같은 방법으로, $r_- \approx (1 - \frac{1}{2}\theta^2) - (1 - \theta^2) = \frac{1}{2}\theta^2$이다.)

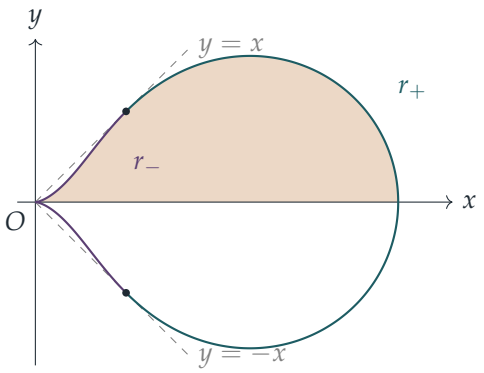
**$r = 0$ 근처의 모양.** 여기서 $x = r\cos\theta \approx \frac{1}{2}\theta^2$이고 $y = r\sin\theta \approx \frac{1}{2}\theta^3$이므로 $y^2 \approx 2x^3$이다. 따라서 안쪽 가지는 $x > 0$ 쪽에서 위아래로부터 시초선에 접하며 원점으로 들어와, $O$에서 왼쪽을 향하는 **첨점**(cusp)을 이룬다.

**$\theta = \pm\frac{1}{4}\pi$ 근처의 모양.** 방정식을 음함수 미분(implicit differentiation)하면

$$(2r - 2\cos\theta)\,\mathrm{d}r + (2r\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{\cos\theta - r}{\sin\theta\,(r + \cos\theta)}.$$

$r = \frac{1}{\sqrt{2}}, \theta = \frac{1}{4}\pi$에서 분자는 0이고 분모는 0이 아니므로 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}r = 0$이다. 또한 곡선 전체에서 $\theta \leq \frac{1}{4}\pi$이다. 따라서 $\theta$는 그곳에서 최댓값을 가지며, 곡선은 동경 직선 $y = x$에 접한다. 바깥 가지는 $y = x$를 따라 $O$ 쪽으로 들어오고, 안쪽 가지는 $y = x$를 따라 $O$에서 멀어지는 방향으로 나가며, 두 가지는 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$에서 매끄럽게 이어진다. 꺾인 점은 없다. 대칭성에 의해 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$에서도 마찬가지이다.

따라서 $C_2$는 시초선에 대하여 대칭인 닫힌 곡선으로, 뾰족한 끝이 $O$의 첨점인 물방울 모양이다. 바깥쪽 경계는 $C_1$이고, 안쪽 경계는 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$에서 $O$의 첨점으로 내려왔다가 다시 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$로 나간다.




(그림은 $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin u$를 이용해 그렸으며, 이렇게 하면 $\sqrt{\cos 2\theta} = \cos u$가 된다. $u$를 한 바퀴 돌리면 무한대 기울기 없이 $C_2$ 전체를 그릴 수 있다.)

**넓이.** $0 \le \theta \le \frac{1}{4}\pi$일 때, 각 $\theta$의 반직선은 정확히 $r_- \le r \le r_+$인 부분에서 $C_2$의 내부에 있다. 따라서 색칠한 넓이는 두 극좌표 부채꼴(polar sector)의 넓이의 차이다.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}\left(r_+^2 - r_-^2\right) \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}(r_+ - r_-)(r_+ + r_-)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{\cos 2\theta}\cdot 2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/4} \cos\theta\sqrt{1-2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

$\sqrt{2}\sin\theta = \sin u$로 치환(substitution)하면 $\sqrt{2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \cos u\,\mathrm{d}u$이고, $\theta$가 0에서 $\frac{1}{4}\pi$까지 변할 때 $u$는 0에서 $\frac{1}{2}\pi$까지 변한다.

$$A = 2\int_0^{\pi/2} \cos u\cdot\frac{\cos u}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 u\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

이것이 구하려던 결과이다. (같은 방법으로, 치환 $s = \sqrt{2}\sin\theta$를 쓰면 적분은 $\sqrt{2}\int_0^1\sqrt{1-s^2}\,\mathrm{d}s$가 되며, 이는 단위원판 넓이의 4분의 1에 $\sqrt{2}$를 곱한 것이다.)

## 검산

- $\theta = 0$에서 $r_\pm = 1 \pm 1$이므로 점 $(2,0)$과 $O$를 얻으며, 개형과 일치한다.
- $\theta = 0.01$에서 $r_- = \cos 0.01 - \sqrt{\cos 0.02} \approx 5.0002\times 10^{-5}$이고, 이를 $\frac{1}{2}\theta^2 = 5\times 10^{-5}$와 비교할 수 있다.
- 수치적으로 $\pi/(2\sqrt{2}) \approx 1.11072$이며, $[0, \frac{1}{4}\pi]$에서 $\frac{1}{2}(r_+^2 - r_-^2)$를 직접 수치적분하면 소수점 아래 여섯째 자리까지 같은 값을 얻는다.
- 대략적인 범위: $C_2$의 위쪽 절반은 넓이가 약 1.62인 직사각형 $[0,2]\times[0,0.81]$ 안에 있고, 꼭짓점이 $(\frac{1}{2},0)$, $(2,0)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$이고 넓이가 0.375인 삼각형을 포함한다. 값 1.11은 이 둘 사이에 적절히 놓인다.

## 흔한 실수

- $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$에서 $C_1$을 꺾인 모양으로 그리거나 곡선이 $y = x$를 가로지르도록 그리는 것: $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$가 무한대라는 것은 곡선이 그곳에서 동경 직선에 접한다는 뜻이다.
- $O$에서 첨점 대신 둥글고 매끄러운 끝을 그리는 것: $y^2 \approx 2x^3$은 전형적인 첨점 모양이다.
- $\int \frac{1}{2} r_+^2 \, \mathrm{d}\theta$만 계산하는 것: 이것은 $C_1$까지의 넓이로, 안쪽 가지 안의 비어 있는 영역까지 포함한다.

## STEP 너머

원점 근처의 곡선 $y^2 = 2x^3$은 반삼차 포물선(semicubical parabola)이며, 첨점의 대표적인 예이다. 첨점은 매끄러운 매개화(parametrisation)의 속도가 어느 순간 0이 될 때마다 나타난다. 여기서는 $(x, y) \approx (\frac{1}{2}\theta^2, \frac{1}{2}\theta^3)$의 도함수가 $\theta = 0$에서 0이다. 대수곡선의 이러한 특이점(singular point)을 분류하는 것이 대수기하학(algebraic geometry)의 출발점이다. 극곡선과 그 넓이는 또한 자연스럽게 그린 정리(Green's theorem)로 이어지는데, 이 정리는 둘러싸인 넓이를 그 경계를 따라 도는 선적분(line integral)으로 나타낸다. 이런 곡선을 기하학적으로 바라보고 싶다면 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 읽어 보자.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.