풀이

STEP III 2020, 문제 5

순수수학 • 부분분수

> **STEP III 2020, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

첫 번째 항등식은 모습을 바꾼 유한 등비급수(finite geometric series)이며, 바로 이것이 $(1-(x/k)^n)/(x-k)$를 명시적인 다항식(polynomial)으로 바꾸어 준다. 그 덕분에 계수를 번거롭게 비교하지 않고도 $1/(x^n(x-k))$의 완전한 부분분수 분해(partial-fraction decomposition)를 얻는다. 이어서 미분하면 **중복** 인수 $(x-k)^2$를 갖는 분해가 나오고, 마지막 적분은 모든 항을 바로 적분할 수 있는 특수한 경우일 뿐이다.

풀이

첫 번째 항등식

우변을 전개하여 두 합으로 나눈다:

$$\begin{aligned}(x-y)\sum_{r=1}^{n} x^{n-r}y^{r-1} &= \sum_{r=1}^{n} x^{n-r+1}y^{r-1} - \sum_{r=1}^{n} x^{n-r}y^{r} \\ &= (x^n + x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1}) - (x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1} + y^n) \\ &= x^n - y^n,\end{aligned}$$

왜냐하면 x^n(첫 번째 합의 $r=1$ 항)과 y^n(두 번째 합의 $r=n$ 항)을 제외한 모든 항이 각 괄호에 한 번씩 나타나 소거되기 때문이다.

소문항 (i)(a)

$\mathrm{F}(x) = \dfrac{A}{x-k} + \dfrac{\mathrm{f}(x)}{x^n}$의 양변에 $x^n(x-k)$를 곱하면

$$1 = Ax^n + \mathrm{f}(x)(x-k).$$

이것은 다항식 사이의 항등식으로, $x \neq 0, k$일 때 항상 성립하므로 모든 x에 대해 성립한다 (무한히 많은 점에서 값이 같은 두 다항식은 같다). $x = k$를 대입하면 $1 = Ak^n$이므로 $A = 1/k^n$이다($k \neq 0$이므로 가능하다). 그러면

$$\mathrm{f}(x)(x-k) = 1 - \frac{x^n}{k^n}, \qquad \text{따라서} \qquad \mathrm{f}(x) = \frac{1}{x-k}\left(1 - \left(\frac{x}{k}\right)^n\right)$$

이 $x \neq k$에서 성립하며, 이것이 요구된 결과이다.

? **생각해 보기** 분모에 $x-k$가 없는 꼴로 어떻게 바꿀 수 있을까?

첫 번째 항등식에서 x 대신 1을, y 대신 x/k를 넣는다:

$$1 - \left(\frac{x}{k}\right)^n = \left(1 - \frac{x}{k}\right)\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{x}{k}\right)^{r-1} = -\frac{x-k}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{x^{r-1}}{k^{r-1}}.$$

$x-k$로 나누면

$$\mathrm{f}(x) = -\frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{x^{r-1}}{k^{r-1}}, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{\mathrm{f}(x)}{x^n} = -\frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{k^{r-1}x^{n+1-r}}.$$

(이로써 f가 실제로 다항식임도 확인된다.) 이제 $s = n+1-r$로 첨자를 바꾼다(re-index). r가 $1, \ldots, n$을 지나는 동안 이 값도 같은 범위를 지난다. 그러면 $r-1 = n-s$이고, 합은 $\sum_{s=1}^{n} 1/(k^{n-s}x^s)$가 된다. 따라서

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{k^n(x-k)} - \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{k^{n-r}x^r}.$$

소문항 (i)(b)

$x^n\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{x-k}$이므로, 곱의 미분법(product rule)으로 양변을 미분하면

$$nx^{n-1}\mathrm{F}(x) + x^n\mathrm{F}'(x) = -\frac{1}{(x-k)^2}.$$

$-x^n$으로 나누면($x \neq 0$이므로 문제없다)

$$\frac{1}{x^n(x-k)^2} = -\frac{n}{x}\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}'(x).$$

(a)의 결과로부터

$$-\frac{n}{x}\mathrm{F}(x) = -\frac{n}{xk^n(x-k)} + \sum_{r=1}^{n}\frac{n}{k^{n+1-r}x^{r+1}},$$

이고, (a)의 결과를 항별로 미분하면

$$-\mathrm{F}'(x) = \frac{1}{k^n(x-k)^2} - \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{r}{k^{n-r}x^{r+1}} = \frac{1}{k^n(x-k)^2} - \sum_{r=1}^{n}\frac{r}{k^{n+1-r}x^{r+1}}.$$

두 식을 더하면 두 합이 하나로 합쳐져

$$\frac{1}{x^n(x-k)^2} = \frac{1}{k^n(x-k)^2} - \frac{n}{xk^n(x-k)} + \sum_{r=1}^{n} \frac{n-r}{k^{n+1-r}x^{r+1}},$$

이 되고, 이것이 요구된 결과이다.

소문항 (ii)

(b)에서 $n=3, k=1$로 두자. 합의 $r=3$ 항은 0이 되고,

$$\frac{1}{x^3(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{3}{x(x-1)} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}.$$

가운데 항은 한 번 더 나누어야 한다: $\dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}$. $[2, N]$에서는 모든 것이 연속이고 $x-1>0$이므로, 그 구간에서의 원시함수(antiderivative)는

$$G(x) = -\frac{1}{x-1} - 3\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2},$$

이고

$$\int_2^N \frac{1}{x^3(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = G(N) - G(2).$$

생각해 보기 왜 두 로그를 함께 묶어 두어야 할까?

따로 떼어 놓으면 $-3\ln(N-1)$과 $+3\ln N$은 각각 무한대로 발산하므로 항별로 극한을 취할 수 없다. 함께 묶으면 ln이 1에서 연속이므로 $N\to\infty$일 때 $\ln((N-1)/N) = \ln(1-\frac{1}{N}) \to \ln 1 = 0$이다. $G(N)$의 나머지 세 항은 분명히 0으로 수렴하므로 $G(N)\to 0$이다.

마지막으로

$$G(2) = -1 - 3\ln\tfrac{1}{2} - 1 - \tfrac{1}{8} = 3\ln 2 - \tfrac{17}{8},$$

이므로

$$\lim_{N\to\infty}\int_2^N \frac{1}{x^3(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{17}{8} - 3\ln 2.$$

검산

- 피적분함수가 양수이므로 답도 양수여야 한다. 실제로 $\frac{17}{8} - 3\ln 2 \approx 2.1250 - 2.0794 = 0.0456$이다.
- 또한 값이 작아야 한다. 피적분함수는 $x=2$에서 $\frac{1}{8}$이고 대략 x^{-5}처럼 감소한다. 거칠게 $\frac{1}{8}(2/x)^5$로 위에서 누르면 기껏해야 $\int_2^\infty 4x^{-5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}$이다. 수치 적분으로 값 $0.045558\ldots$를 소수점 아래 여러 자리까지 확인할 수 있다.

- (b)에서 $n = 1$을 대입해 보자. 합은 0이 되고(유일한 항에서 $n - r = 0$이므로), 우변은 $\dfrac{1}{k(x-k)^2} - \dfrac{1}{xk(x-k)} = \dfrac{x-(x-k)}{xk(x-k)^2} = \dfrac{1}{x(x-k)^2}$로, 마땅히 나와야 할 결과와 같다.

흔한 실수

- $1 - x/k$를 $-(x-k)/k$로 쓸 때 부호를 틀린다.
- (a)에서 합의 첨자를 바꾸는 것을 잊어, k와 x의 거듭제곱이 목표 식과 맞지 않게 된다.
- $\ln\big((x-1)/x\big)$를 두 로그로 나눈 뒤 적분이 발산한다고 주장하거나, "$\infty - \infty = 0$"이라고 쓴다.

STEP 너머

여기서 만든 것은 x^n과 $(x-k)^m$ 꼴의 인수에 대한 일반적인 부분분수 분해이다. x에 대해(또는 근 k에 대해) 미분하는 것은 중복 인수 항을 만들어 내는 표준적인 방법이다. (ii)에서처럼 무한 구간에서의 적분이 수렴하는지 판단하는 것은 해석학 입문 과정에서 다루는 이상적분(improper integral)의 주제이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)는 이러한 극한을 신중하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.