풀이

STEP III 2020, 문제 4

순수수학 • 대칭 행렬과 회전 행렬

STEP III 2020, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

첫 번째 결과에 사실상 문제 전체가 담겨 있다. $(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$을 빼면 점이 평면으로 곧장 내려가므로, 그 양의 두 배를 빼면 점은 평면 반대쪽으로 같은 거리만큼 더 나아간다. 이것이 바로 반사(reflection)이다. 반사를 $\mathbf{x}\mapsto\mathbf{x}-2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$으로 나타내고 나면, 그 행렬과 $\mathbf{n}$을 축으로 하는 반바퀴 회전(half-turn), 그리고 둘의 곱은 계산을 거의 하지 않고도 모두 얻을 수 있다.

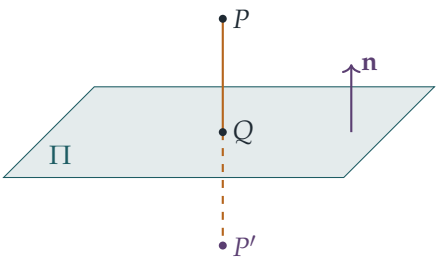
풀이

첫 번째 결과

$\mathbf{q}=\mathbf{x}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$이라 하자. $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1$이므로

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})=0,$$

이고, 따라서 Q는 Π 위에 있다. 또한 $\overrightarrow{PQ}=\mathbf{q}-\mathbf{x}=-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$이며, 이는 법선벡터(normal) $\mathbf{n}$의 실수배이다. P가 Π 위에 있지 않으므로($\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}\neq 0$이므로) 이 벡터는 영벡터가 아니다. 따라서 PQ는 Π에 수직이고, 증명이 끝난다.



그림은 우리가 나아갈 방향도 보여 준다. Π에 대한 P의 거울상 P'은 P가 Q 위에 있는 만큼 Q 너머에 있으므로, 그 위치벡터(position vector)는

$$\mathbf{x} - 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}.$$

이다. (P가 Π 위에 있으면 이 식은 P 자신을 주는데, 이 역시 옳다.)

소문항 (i)

$\mathbf{n} = (a,b,c)^{\mathsf{T}}$로 잡자. $a^2+b^2+c^2 = 1$이므로 이것은 단위 법선벡터(unit normal)이다. $\mathbf{i}$에 대해서는 $\mathbf{i}\cdot\mathbf{n} = a$이므로

$$T(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 2a\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-2a^2\\-2ab\\-2ac\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b^2+c^2-a^2\\-2ab\\-2ac\end{pmatrix},$$

이다. 여기서 첫 번째 성분에 $1 = a^2+b^2+c^2$을 사용하였다. 이것이 구하는 상이다. 같은 방법으로 $\mathbf{j}\cdot\mathbf{n} = b$, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{n} = c$를 이용하면

$$T(\mathbf{j}) = \begin{pmatrix}-2ab\\a^2+c^2-b^2\\-2bc\end{pmatrix}, \qquad T(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix}-2ac\\-2bc\\a^2+b^2-c^2\end{pmatrix}.$$

이다. $\mathbf{M}$의 열은 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$의 상이므로

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix}b^2+c^2-a^2 & -2ab & -2ac\\-2ab & a^2+c^2-b^2 & -2bc\\-2ac & -2bc & a^2+b^2-c^2\end{pmatrix} = \mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}.$$

이다.

소문항 (ii)

주어진 행렬을 $\mathbf{M}$과 비교한다. 각 대각성분을 $1-2a^2, 1-2b^2, 1-2c^2$으로 쓰면

$$1-2a^2 = 0.64, \quad 1-2b^2 = 0.36, \quad 1-2c^2 = 0 \implies a^2 = 0.18, \quad b^2 = 0.32, \quad c^2 = 0.5.$$

이다. 따라서 $|a| = \frac{3}{5\sqrt{2}}$, $|b| = \frac{4}{5\sqrt{2}}$, $|c| = \frac{5}{5\sqrt{2}}$이다.

? **생각해 보기** 대각성분으로부터는 a^2, b^2, c^2만 알 수 있다. 부호는 어떻게 정할까?

비대각성분으로부터 곱을 얻는다.

$$-2ab = 0.48, \quad -2ac = 0.6, \quad -2bc = -0.8 \implies ab = -0.24, \quad ac = -0.3, \quad bc = 0.4.$$

따라서 b와 c는 부호가 같고, a는 부호가 반대이다. (a, b, c)를 $(-a, -b, -c)$로 바꾸어도 달라지는 것이 없으므로(같은 평면이다) $c > 0$으로 잡을 수 있고, 그러면

$$(a, b, c) = \tfrac{1}{5\sqrt{2}}(-3, 4, 5).$$

이다. 이 값들로부터 $ab = -\frac{12}{50}$, $ac = -\frac{15}{50}$, $bc = \frac{20}{50}$을 얻으므로 서로 독립인 여섯 성분이 모두 일치한다. 양변에 $-5\sqrt{2}$를 곱하면 평면은

$$3x - 4y - 5z = 0.$$

이다.

소문항 (iii)

임의의 벡터를 $\mathbf{x} = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{x} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n})$로, 즉 축 방향 성분과 축에 수직인 성분의 합으로 분해한다(첫 번째 결과). 축을 중심으로 하는 각 π의 회전(rotation)은 첫 번째 성분은 그대로 두고 두 번째 성분의 방향은 뒤집으므로

$$\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} - (\mathbf{x} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}) = 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{x}.$$

이다. 이것은 정확히 $-T(\mathbf{x})$이다. 따라서 $\mathbf{N} = 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}} - \mathbf{I} = -\mathbf{M}$, 즉

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 - c^2 & 2ab & 2ac \\ 2ab & b^2 - a^2 - c^2 & 2bc \\ 2ac & 2bc & c^2 - a^2 - b^2 \end{pmatrix}.$$

이다.

소문항 (iv)

? **생각해 보기** 여기서 a, b, c로 이루어진 3×3 행렬 두 개를 직접 곱해야 할까?

그렇지 않다. (iii)에 의해 $\mathbf{NM} = -\mathbf{M}^2$이다. 같은 평면에 대해 두 번 반사하면 모든 점이 제자리로 돌아오므로 $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$이다. (대수적으로는 $\mathbf{n}^{\mathsf{T}}\mathbf{n} = 1$이므로 $(\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}})^2 = \mathbf{I} - 4\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}} + 4\mathbf{n}(\mathbf{n}^{\mathsf{T}}\mathbf{n})\mathbf{n}^{\mathsf{T}} = \mathbf{I}$이다.) 따라서

$$\mathbf{NM} = -\mathbf{I},$$

이고, 이 변환은 모든 $\mathbf{x}$를 $-\mathbf{x}$로 보낸다. 이것은 원점에 대한 대칭이며, 중심 반전(central inversion) 또는 원점을 중심으로 하는 배율 -1의 확대(enlargement)라고도 한다. 이 결과가 a, b, c에 전혀 의존하지 않는다는 점에 주목하자.

검산

- $\mathbf{M}$의 각 열은 단위벡터여야 한다. 첫 번째 열의 경우 $(b^2+c^2-a^2)^2+4a^2b^2+4a^2c^2=(b^2+c^2+a^2)^2=1$이다.
- (ii)에서 법선벡터 $(3,-4,-5)$는 그 음의 벡터로 옮겨져야 한다. 주어진 행렬은 이를 $(1.92-1.92-3,\ 1.44-1.44+4,\ 1.8+3.2)=(-3,4,5)$로 보낸다. 맞다.
- $\mathbf{n}=\mathbf{k}$로 잡으면 $\mathbf{M}=\operatorname{diag}(1,1,-1)$로 $z=0$에 대한 반사가 되고, $\mathbf{N}=\operatorname{diag}(-1,-1,1)$로 z축을 중심으로 하는 반바퀴 회전이 된다. 둘의 곱은 분명히 $-\mathbf{I}$이다.
- 무작위 단위벡터 $\mathbf{n}$ 1000개로 컴퓨터 검산을 하여 $\mathbf{M}$의 식, $\mathbf{N}$이 $\mathbf{n}$을 고정하고 수직인 벡터의 방향을 뒤집는다는 것, 그리고 $\mathbf{NM}=-\mathbf{I}$임을 확인하였다. (ii)의 행렬도 10^{-15} 이내의 오차로 재현되었다.

흔한 실수

- $\mathbf{x}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$을 반사로 사용하는 것. 이것은 수선의 발(foot of the perpendicular)이므로 인수 2가 빠져 있다.
- (ii)에서 제곱근으로부터 a,b,c의 부호를 각각 독립적으로 고르는 것. 상대적인 부호는 비대각성분으로만 정해진다.
- $\mathbf{NM}$이 "항등변환"이라고 말하는 것. 반사의 행렬식(determinant)은 -1이고 회전의 행렬식은 $+1$이므로 곱의 행렬식은 -1이다. 3차원에서 $\det(-\mathbf{I})=-1$이므로 이와 모순이 없다.

STEP 너머

행렬 $\mathbf{I}-2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$를 하우스홀더 반사(*Householder reflection*)라고 한다. 수치선형대수(numerical linear algebra)에서는 행렬을 삼각행렬(triangular form)로 바꾸는 데 이것을 끊임없이 사용하며, n차원의 모든 직교행렬(orthogonal matrix)은 이러한 반사를 많아야 n개 곱한 것이다. 소문항 (iv)는 이 구조의 작은 예이다. $\mathbb{R}^3$에서 반바퀴 회전과 그에 수직인 평면에 대한 반사를 합성하면 $-\mathbf{I}$가 된다. 직교행렬, 정사영(projection), 반사에 대해서는 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.