풀이

STEP III 2020, 문제 3

순수수학 • 기하에서의 복소수

> **STEP III 2020, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

복소평면(complex plane)에서 a를 중심으로 각 θ만큼 회전(rotation)하는 변환은 단순히 $z \mapsto a + (z-a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$이므로, G_{AB}는 a와 b의 명시적인 일차결합(linear combination)이 된다. 소문항 (i)에서 이 공식을 얻고 나면 기하 문제가 대수 문제로 바뀐다. 평행사변형(parallelogram)은 꼭짓점에 대한 일차 조건이 되고, 정삼각형(equilateral triangle)은 한 변이 다른 변을 일정한 각만큼 돌린 것이라는 조건이 된다. 문제 전체가 ω의 거듭제곱에 관한 몇 가지 사실에 기대고 있다.

풀이

이 풀이 전체에서 $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$이므로 $\omega^* = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$이고, 다음과 같이 쓴다.

$$\rho = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

앞으로 사용할 세 가지 사실은 다음과 같다.

$$\omega^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}, \qquad \omega^3 = \mathrm{i}, \qquad \omega - \omega^* = 2\mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{6} = \mathrm{i}.$$

소문항 (i)

시계 방향으로 $\frac{1}{3}\pi$만큼 회전하는 것은 ρ를 곱하는 것이다. A를 중심으로 회전한다는 것은 변위 $b-a$를 회전시킨 뒤 다시 a에 더한다는 뜻이므로

$$k = a + (b-a)\rho.$$

따라서 ABK의 무게중심(centroid)은

$$g_{ab} = \tfrac{1}{3}(a+b+k) = \tfrac{1}{3}[(2-\rho)\,a + (1+\rho)\,b].$$

이제 두 계수를 정리한다.

$$2-\rho = \tfrac{3}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \sqrt{3}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \sqrt{3}\,\omega,$$
$$1+\rho = \tfrac{3}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \sqrt{3}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \sqrt{3}\,\omega^*.$$

그러므로

$$g_{ab} = \tfrac{1}{3}(\sqrt{3}\,\omega a + \sqrt{3}\,\omega^* b) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\omega a + \omega^* b),$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

사각형(quadrilateral) $PQRS$(꼭짓점은 이 순서대로)가 평행사변형일 필요충분조건은 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$, 즉 $q-p = r-s$이고, 이는 다음과 동치이다.

$$p - q + r - s = 0.$$

(이는 대각선(diagonal) PR와 QS의 중점(midpoint)이 같다는 말과 같다.) 따라서 Q_1이 평행사변형일 필요충분조건은 $a-b+c-d=0$이고, Q_2가 평행사변형일 필요충분조건은

$$g_{ab} - g_{bc} + g_{cd} - g_{da} = 0.$$

네 점 각각에 소문항 (i)을 적용하면

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\,(g_{ab} - g_{bc} + g_{cd} - g_{da}) &= (\omega a + \omega^* b) - (\omega b + \omega^* c) + (\omega c + \omega^* d) - (\omega d + \omega^* a)\\ &= (\omega - \omega^*)a - (\omega - \omega^*)b + (\omega - \omega^*)c - (\omega - \omega^*)d\\ &= \mathrm{i}\,(a - b + c - d).\end{aligned}$$

따라서

$$g_{ab} - g_{bc} + g_{cd} - g_{da} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\,(a - b + c - d),$$

이고 $\mathrm{i}/\sqrt{3} \neq 0$이므로 한쪽 변이 0이 될 필요충분조건은 다른 쪽 변이 0이 되는 것이다. 그러므로 Q_1이 평행사변형일 필요충분조건은 Q_2가 평행사변형인 것이다.

생각해 보기 Q_2가 평행사변형 조건을 만족하면서도 두 꼭짓점이 일치하여 찌그러질 수 있을까?

그렇다. 한 가지 특수한 경우가 있다. ABC가 시계 방향으로 이름 붙인 정삼각형이면, B를 A 중심으로 시계 방향으로 회전한 점은 C가 되므로 G_{AB}와 G_{BC}는 모두 ABC의 무게중심이다. 마름모(rhombus) $ABCD$를 완성하면 Q_2는 선분으로 납작해진다. 이때에도 조건 $p-q+r-s=0$은 여전히 성립하므로, 이 동치 관계는 사실 이 벡터 조건에 관한 명제이며, 이런 문제에서 "평행사변형"이 뜻하는 바도 바로 이것이다.

소문항 (iii)

T_2의 한 변을 벡터로 보면 다른 변을 일정한 각만큼 돌린 것임을 보인다. 소문항 (i)로부터

$$\sqrt{3}\,(g_{bc} - g_{ab}) = (\omega b + \omega^* c) - (\omega a + \omega^* b) = -\omega a + \mathrm{i}\, b + \omega^* c,$$
$$\sqrt{3}\,(g_{ca} - g_{bc}) = (\omega c + \omega^* a) - (\omega b + \omega^* c) = \omega^* a - \omega b + \mathrm{i}\, c,$$

이며, 각 줄에서 $\omega - \omega^* = \mathrm{i}$를 사용하였다.

? **생각해 보기** 어떤 수 λ를 곱하면 두 번째 괄호가 첫 번째 괄호로 바뀔까?

a의 계수를 맞추면 $\lambda\omega^* = -\omega$여야 하므로 $\lambda = -\omega/\omega^* = -\omega^2 = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}$이다. 이 λ는 b와 c에 대해서도 성립한다.

$$\lambda \cdot (-\omega) = \omega^3 = \mathrm{i},$$
$$\lambda \cdot \mathrm{i} = -\omega^2 \cdot \omega^3 = -\omega^5 = -\mathrm{e}^{5\pi\mathrm{i}/6} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6} = \omega^*.$$

그러므로 모든 a, b, c에 대하여

$$g_{bc} - g_{ab} = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}\,(g_{ca} - g_{bc}).$$

$|\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}| = 1$이므로 절댓값(modulus)을 취하면 $G_{AB}G_{BC} = G_{BC}G_{CA}$이다. 또한 T_2를 따라 이동하는 방향이 G_{BC}에서 $\frac{2}{3}\pi$만큼 꺾이므로, G_{BC}에서 T_2의 내각(interior angle)은 $\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi$이다. 길이가 같은 두 변이 $\frac{1}{3}\pi$의 각을 끼고 있는 삼각형은 밑각이 $\frac{1}{2}(\pi - \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{3}\pi$인 이등변삼각형(isosceles triangle)이므로 모든 각이 $\frac{1}{3}\pi$이고, 따라서 T_2는 정삼각형이다.

유일한 예외는 $g_{ca} = g_{bc}$인 경우인데, 이때 위의 관계식에서 $g_{ab} = g_{bc}$도 성립하므로 T_2는 한 점으로 줄어든다. $\omega^* a - \omega b + \mathrm{i}c = 0$에 ω를 곱하면 $a - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}b + \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}c = 0$을 얻는데, 이는 정확히 ABC 자신이 시계 방향으로 이름 붙인 정삼각형일 때 일어난다(소문항 (ii)의 설명에서와 같다). 퇴화된(degenerate) 삼각형을 포함하여 그 밖의 모든 삼각형 T_1은 진짜 정삼각형 T_2를 만든다.

검산

- $a = 0, b = 1$로 두자. 그러면 $k = \rho$이고, $0, 1, \rho$의 무게중심은 $\frac{1}{3}(1 + \rho) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}$이다. 공식은 $\omega^*/\sqrt{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{i}$를 주는데, 이는 같은 수이다.
- $a = 0, b = 1, c = \mathrm{i}$(직각삼각형)일 때, T_2의 세 점 사이의 거리는 모두 약 1.1154로 같다. 무작위로 만든 삼각형과 사각형 10^4개에 대해 컴퓨터로 확인한 결과, 소문항 (ii)와 (iii)의 항등식이 반올림 오차 범위 안에서 성립하였다.

흔한 실수

- b를 A가 아니라 원점을 중심으로 회전시켜 $k = b\rho$로 쓰는 것.
- 시계 방향 회전에 $e^{+i\pi/3}$을 사용하는 것. 시계 방향은 음의 방향이다.
- 소문항 (ii)에서 한쪽 방향만 증명하는 것. 인수 $i/\sqrt{3}$이 0이 아니라는 사실이 바로 "필요충분조건"을 보장한다.

STEP 너머

소문항 (iii)은 나폴레옹의 정리(Napoleon's theorem)이다. 임의의 삼각형의 각 변 위에 정삼각형을 세우면(여기서는 ABC를 반시계 방향으로 이름 붙였을 때 바깥쪽으로), 그 정삼각형들의 무게중심은 정삼각형을 이룬다. 복소수를 이용한 증명이 통하는 까닭은 회전과 무게중심이 모두 평면의 선형사상(linear map)이기 때문이다. 이것이 기하학에서 변환군(transformation group)을 연구하는 출발점이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수 곱셈에 대한 이러한 기하학적 관점을 아름답게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.