풀이

STEP III 2020, 문제 2

순수수학 • 쌍곡선 함수 곡선 그리기

> **STEP III 2020, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

음함수 미분(implicit differentiation)을 하고, $\cosh^2 = 1 + \sinh^2$를 계속 사용하여 모든 것을 다시 쌍곡사인으로 바꾼다. 그러면 이계도함수(second derivative)에 대한 조건이 인수분해되고, 그 인수 중 하나가 바로 곡선 자신의 방정식이 된다. 직선 $x + y = a$에 대해서는 $y = a - x$를 대입하고 모든 것을 지수함수로 나타낸다. 실수인 교점이 존재하려면 판별식(discriminant)이 음이 아니어야 하고, 이로부터 $\cosh a$의 범위가 나온다.

풀이

소문항 (i)

$\sinh$는 $\mathbb{R}$ 위의 전단사(bijection)이므로, 각 x에 대하여 $\sinh y = 2k - \sinh x$를 만족하는 y가 정확히 하나 존재한다. 따라서 C는 모든 실수 x에서 정의된 함수 $y = \operatorname{arsinh}(2k - \sinh x)$의 그래프이고, 음함수 미분을 할 수 있다.

$$\cosh x + \cosh y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\cosh x}{\cosh y}.$$

$\cosh x \geq 1$이므로 기울기(gradient)는 결코 0이 되지 않는다(항상 음수이다). 따라서 C는 정상점(stationary point)을 갖지 않는다.

$y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$로 쓰고 한 번 더 미분하면

$$\sinh x + \sinh y \, (y')^2 + \cosh y \, y'' = 0.$$

$y' = -\cosh x / \cosh y$를 대입하고 양변에 $\cosh^2 y$를 곱하면

$$\begin{aligned}\cosh^3 y\, y'' &= -\left(\sinh x \cosh^2 y + \sinh y \cosh^2 x\right)\\ &= -\left(\sinh x\,(1+\sinh^2 y) + \sinh y\,(1+\sinh^2 x)\right)\\ &= -(\sinh x + \sinh y) - \sinh x \sinh y\,(\sinh y + \sinh x)\\ &= -(\sinh x + \sinh y)(1 + \sinh x \sinh y).\end{aligned}$$

C 위에서 첫 번째 인수는 $2k$이므로

$$y'' = -\frac{2k\,(1+\sinh x \sinh y)}{\cosh^3 y}.$$

$k > 0$이고 $\cosh y > 0$이므로, $y'' = 0$일 필요충분조건은 $1 + \sinh x \sinh y = 0$이다. 이것이 증명하려던 것이다.

? 생각해 보기 $y'' = 0$이기만 하면 변곡점(point of inflection)이라고 할 수 있는가?

그렇지 않다. y''의 부호가 바뀌는 것도 확인해야 한다. $s = \sinh x$, $t = \sinh y$로 놓자. $y'' = 0$인 점에서는 $s + t = 2k$이고 $st = -1$이므로, s와 t는 $u^2 - 2ku - 1 = 0$의 두 근이다.

$$u = k \pm \sqrt{k^2+1}.$$

두 근 중 하나는 양수이고 하나는 음수이며, s는 둘 중 어느 값이든 될 수 있고 t는 나머지 값이 된다. 곡선을 따라가면 $1 + st = 1 + s(2k - s) = -(s^2 - 2ks - 1)$는 s에 대한 이차식이고 서로 다른 두 단순근을 가지므로, 각 근에서 부호가 바뀐다. $s = \sinh x$는 x에 대하여 증가하므로, 두 점 모두에서 y''의 부호가 실제로 바뀐다. 따라서 변곡점은

$$\left(\operatorname{arsinh}(k+\sqrt{k^2+1}),\ \operatorname{arsinh}(k-\sqrt{k^2+1})\right) \quad \text{와}$$
$$\left(\operatorname{arsinh}(k-\sqrt{k^2+1}),\ \operatorname{arsinh}(k+\sqrt{k^2+1})\right)$$

이다. 두 점은 직선 $y = x$에 대하여 서로 대칭인데, C의 방정식이 x와 y에 대하여 대칭이므로 이는 예상한 대로이다.

소문항 (ii)

직선 위에서는 $y = a - x$이다. $2\sinh u = \mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u}$로 쓰면, C의 방정식의 양변을 두 배 한 식은 다음과 같이 된다.

$$\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{a-x} - \mathrm{e}^{x-a} = 4k.$$

양변에 e^x를 곱하면 $\mathrm{e}^{2x} - 1 + \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{2x-a} = 4k\mathrm{e}^x$, 즉

$$\mathrm{e}^{2x}(1 - \mathrm{e}^{-a}) - 4k\mathrm{e}^x + (\mathrm{e}^a - 1) = 0$$

이고, 이것이 구하려던 방정식이다.

생각해 보기 이러한 점이 존재한다는 사실은 이 방정식에 대해 무엇을 알려 주는가?

이 식은 $X = \mathrm{e}^x$에 대한 이차방정식이고(최고차항의 계수가 0이 아닌 경우), 실근을 가져야 한다.

먼저 $a \neq 0$이다. $a = 0$이면 방정식이 $-4k\mathrm{e}^x = 0$으로 줄어드는데, $k > 0$이므로 이는 불가능하다. 따라서 $\cosh a > 1$이다.

$a \neq 0$이면 최고차항의 계수 $1 - \mathrm{e}^{-a}$가 0이 아니므로, 이 이차방정식이 실근을 가지려면 판별식이 음이 아니어야 한다.

$$16k^2 - 4(1 - \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^a - 1) \geq 0.$$

그런데 $(1 - \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^a - 1) = \mathrm{e}^a - 2 + \mathrm{e}^{-a} = 2\cosh a - 2$이므로, 조건은 $16k^2 \geq 8(\cosh a - 1)$, 즉 $\cosh a \leq 2k^2 + 1$이다. 둘을 합치면

$$1 < \cosh a \leq 2k^2 + 1.$$

따라서 C 위의 모든 점에서 $x + y$는 $-2\operatorname{arsinh} k$와 $2\operatorname{arsinh} k$ 사이에 있고($\cosh(2\operatorname{arsinh} k) = 1 + 2\sinh^2(\operatorname{arsinh} k) = 1 + 2k^2$이기 때문이다), $x + y \neq 0$이다.

사실 C 위에서는 $x + y > 0$이다. $a < 0$이면 $1 - \mathrm{e}^{-a} < 0$이고 $\mathrm{e}^a - 1 < 0$이므로, 이차방정식의 세 계수가 모두 음수가 되어 양의 근 X를 갖지 않는다. (같은 내용을 다르게 말하면, $\sinh x + \sinh y = 2\sinh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}$이고 이 값의 부호는 $x + y$의 부호와 같다.) 최댓값 $x + y = 2\operatorname{arsinh} k$는 $x = y = \operatorname{arsinh} k$에서 나타나며, 이 점에서 판별식이 0이 되어 직선이 C에 접한다.

소문항 (iii)

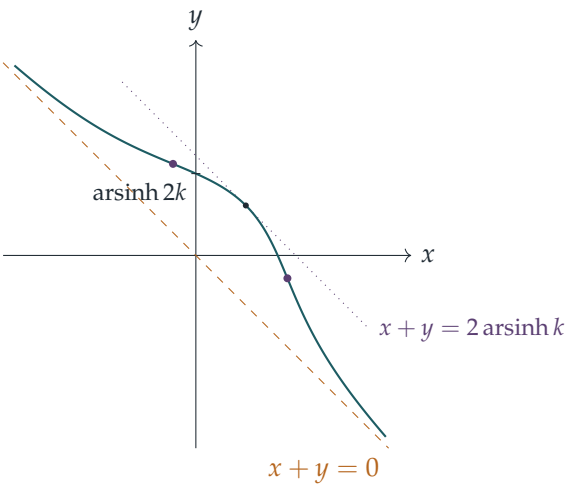
지금까지 알아낸 것을 정리하면 다음과 같다.

- C는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이고, 이 직선과는 $(\operatorname{arsinh} k, \operatorname{arsinh} k)$에서만 만나며, 그 점에서 기울기는 -1이다.
- y는 모든 x에 대하여 정의되고 기울기는 항상 음수이다. 곡선은 좌표축과 $(\operatorname{arsinh} 2k, 0)$, $(0, \operatorname{arsinh} 2k)$에서 만난다.
- $0 < x + y \leq 2\operatorname{arsinh} k$이므로, C는 직선 $x + y = 0$보다 위쪽이면서 직선 $x + y = 2\operatorname{arsinh} k$ 위 또는 그 아래쪽인 띠 모양의 영역에 놓이며, 이 직선은 $y = x$ 위에 있는 C의 점에서 C에 접한다.
- $x \to +\infty$일 때 $\sinh y = 2k - \sinh x \to -\infty$이고 $\mathrm{e}^{-y} \approx \mathrm{e}^x - 4k$이므로, $x + y \approx -\ln(1 - 4k\mathrm{e}^{-x}) \approx 4k\mathrm{e}^{-x} \to 0^+$이다. 대칭성에 의해 $x \to -\infty$일 때도 마찬가지이다.

따라서 $x+y=0$은 양쪽 끝에서의 점근선(asymptote)이며, 곡선은 위쪽에서 점근선에 다가간다.

- y''의 식에 의해, 곡선은 $1+\sinh x \sinh y > 0$인 두 변곡점 사이(예를 들어 $y=x$ 위의 점)에서 오목(concave, 접선보다 아래에 놓임)하고, 그 바깥에서는 볼록(convex)하다.

아래 그림은 $k=1$인 경우를 나타낸 것이며, 변곡점이 표시되어 있다.



검산

- $k=1$일 때 변곡점은 $\left(\operatorname{arsinh}(1+\sqrt{2}), \operatorname{arsinh}(1-\sqrt{2})\right) \approx (1.615, -0.403)$와 그 대칭점이다. 이 점의 양쪽에서 $y=\operatorname{arsinh}(2-\sinh x)$의 이계차분을 계산해 보면 y''의 부호가 그곳에서 바뀜을 확인할 수 있고, $-8 \le x \le 8$ 범위를 조사해 보아도 y''의 다른 영점은 없다.
- 식 $y''=-2k(1+\sinh x \sinh y)/\cosh^3 y$는 여러 k값에 대하여 임의로 고른 많은 점에서 수치적으로 구한 이계도함수와 일치한다.
- $k=1, x=6$일 때 $x+y \approx 0.00996$으로, 예측값 $4\mathrm{e}^{-6} \approx 0.00992$에 가깝다. 앞에서 말한 대로 곡선은 위쪽에서 점근선에 다가간다.
- $x=y=\operatorname{arsinh} k$에서 $\cosh(x+y) = 1+2\sinh^2 x = 1+2k^2$이므로, (ii)의 상한이 실제로 달성된다.

흔한 실수

- $y'' = 0$에서 멈추고 y''의 부호가 바뀌는지 확인하지 않는 것. 이 문제에서는 부호가 바뀌지만, 그 사실을 밝혀야 한다.
- $a = 0$인 경우를 배제하는 것을 잊는 것. 이 단계 덕분에 왼쪽 부등식에 등호가 빠진다.
- 변곡점을 하나만 적는 것. $u^2 - 2ku - 1 = 0$의 어느 근이든 $\sinh x$가 될 수 있으므로, $y = x$에 대하여 대칭인 두 점이 나온다.

STEP 너머

회전된 좌표 $u = x + y$, $v = x - y$를 쓰면 이 곡선의 모양이 한눈에 드러난다. 항등식 $\sinh x + \sinh y = 2\sinh\frac{u}{2}\cosh\frac{v}{2}$에 의해 C는 $\sinh\frac{u}{2} = k\,\mathrm{sech}\frac{v}{2}$가 되는데, 이는 점근선 $u = 0$ 위로 솟은 하나의 봉우리 모양이다. 대칭성에 맞춘 좌표를 고르는 것은 대학 1학년 미적분학과 선형대수학 전반에 걸쳐 나타나는 주제이다(이차형식(quadratic form)을 대각화(diagonalising)하는 것도 같은 생각이다). 음함수 곡선, 그리고 방정식 $F(x, y) = 0$이 언제 실제로 y를 x의 매끄러운 함수로 정의하는가 하는 문제는 음함수 정리(implicit function theorem)가 다루는 주제이다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 그 바탕에 있는 일변수 해석학을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.