풀이

STEP III 2020, 문제 10

역학 • 단순 조화 운동

> **STEP III 2020, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

용수철에 매달린 입자는 평형 위치(equilibrium position)를 중심으로 단순 조화 운동(simple harmonic motion)을 하며, 이로부터 Ω가 k, g, a로 정해진다. 받침대 위에서는 입자의 가속도가 받침대의 가속도와 같고 이는 x로 표현되므로, 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)으로 수직항력(reaction)을 바로 구할 수 있다. 접촉이 유지되려면 수직항력이 항상 음이 아니어야 한다. 수직항력은 x에 대한 **일차식**(*linear*)이므로 받침대가 움직이는 범위의 양 끝에서만 확인하면 되고, 어느 끝이 중요한지는 ω가 Ω보다 작은지 큰지에 따라 달라진다.

풀이

입자는 질점(point mass)으로, 용수철은 질량이 없고 늘어날 때와 압축(compression)될 때 모두 훅의 법칙(Hooke's law)을 따른다고 모형화한다. 풀이 전체에서 입자에 작용하는 힘은 위쪽을 양의 방향으로 잡는다.

매달린 입자. 입자가 A 아래로 떨어진 거리를 y라 하면, 용수철이 늘어난 길이(extension)는 $y-a$이고 장력(tension)은 $kmg(y-a)/a$로 입자에 위쪽으로 작용한다. 아래쪽을 양으로 하여 뉴턴의 제2법칙을 쓰면

$$m\ddot{y} = mg - \frac{kmg}{a}(y-a) \qquad \Longrightarrow \qquad \ddot{y} = -\frac{kg}{a}\left(y - a - \frac{a}{k}\right).$$

$z = y - a\left(1+\frac{1}{k}\right)$로 두면 이 식은 $\ddot{z} = -\frac{kg}{a}z$가 되며, 이는 평형점 $y = a\left(1+\frac{1}{k}\right)$를 중심으로 하는 단순 조화 운동이다. 입자는 이 점이 아닌 곳에서 정지 상태로 놓이므로(a/k가 아닌 어떤 늘어난 길이든 $z \neq 0$을 준다), 각진동수(angular frequency) $\sqrt{kg/a}$, 주기(period)

$2\pi\sqrt{a/(kg)}$로 연직 방향으로 진동한다. 이것을 $2\pi/\Omega$와 같다고 놓으면 $\Omega^2 = kg/a$, 즉

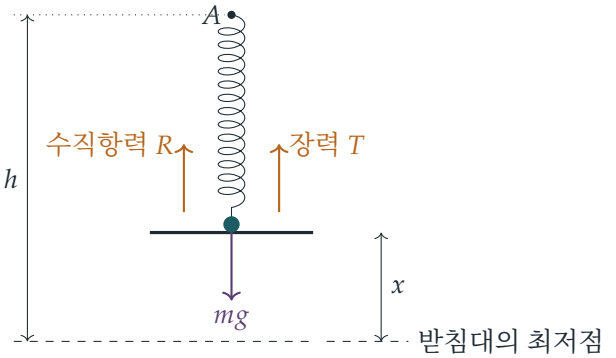
$$kg = a\Omega^2.$$

아래에서는 이를 $g/\Omega^2 = a/k$의 꼴로 사용한다.

받침대. 받침대는 진폭(amplitude) b, 각진동수 ω인 단순 조화 운동을 하므로, 최저점으로부터의 높이 x는 $0 \le x \le 2b$ 범위에 있고 중심은 $x = b$이다. 따라서 받침대의 가속도는

$$\ddot{x} = -\omega^2(x-b) = \omega^2(b-x).$$

(예를 들어 $x = b(1-\cos\omega t)$이면 $\ddot{x} = \omega^2 b\cos\omega t = \omega^2(b-x)$이다.)



수직항력. 입자가 접촉해 있는 동안에는 받침대와 함께 움직이므로, 받침대 최저점으로부터의 높이는 x이고 가속도는 $\ddot{x}$이다. 입자가 A 아래로 떨어진 거리는 $h-x$이므로 용수철이 늘어난 길이는 $h-x-a$이고, $kg/a = \Omega^2$를 이용하면 장력은

$$T = \frac{kmg}{a}(h-x-a) = m\Omega^2(h-x-a),$$

이다. ($h-x<a$이면 용수철이 압축되어 T는 음수, 즉 미는 힘(thrust)이 되며, 같은 식이 그대로 성립한다.) 입자에 작용하는 힘은 위쪽으로 R과 T, 아래쪽으로 mg이므로

$$R + T - mg = m\ddot{x} = m\omega^2(b-x),$$

이고, 따라서

$$R = mg - m\Omega^2(h-x-a) + m\omega^2(b-x) = mg + m\Omega^2(a+x-h) + m\omega^2(b-x),$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

접촉 유지. 입자가 계속 받침대 위에 머무를 필요충분조건은 $[0,2b]$의 모든 x에 대하여 $R \ge 0$인 것이다. x가 포함된 항을 모으면

$$\frac{R}{m} = g + \Omega^2(a-h) + \omega^2 b + (\Omega^2 - \omega^2)\,x.$$

? 생각해 보기 왜 x의 한 값만 살펴보아도 충분할까?

R은 x의 일차함수이므로 구간 $0 \le x \le 2b$에서의 최솟값은 한쪽 끝에서 나타난다. 기울기 $\Omega^2 - \omega^2$가 양수이면 $x = 0$에서, 음수이면 $x = 2b$에서이다. 받침대는 매 주기마다 양 끝에 도달하므로, 항상 $R \ge 0$인 것은 해당하는 끝에서 $R \ge 0$인 것과 동치이다.

$\omega < \Omega$인 경우. 최솟값은 $x = 0$(운동의 최저점)에서 나타나므로

$$g + \Omega^2(a-h) + \omega^2 b \ge 0 \iff h \le a + \frac{g}{\Omega^2} + \frac{\omega^2 b}{\Omega^2} = a\left(1 + \frac{1}{k}\right) + \frac{\omega^2 b}{\Omega^2},$$

이어야 한다. 여기서 $\Omega^2 > 0$으로 나누고 $g/\Omega^2 = a/k$를 이용하였다. 이것이 구하는 부등식(inequality)이다.

$\omega > \Omega$인 경우. 이번에는 최솟값이 $x = 2b$(운동의 최고점)에서 나타나므로

$$g + \Omega^2(a-h) + \omega^2 b + 2b(\Omega^2 - \omega^2) \ge 0 \iff h \le a\left(1 + \frac{1}{k}\right) + b\left(2 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right).$$

이어야 한다.

모든 ω에 대한 한계. 입자가 접촉을 유지한다고 하자.

- $\omega < \Omega$이면 ($b > 0$이므로) $\omega^2 b/\Omega^2 < b$이고, 따라서 $h \le a(1+\frac{1}{k}) + \omega^2 b/\Omega^2 < a(1+\frac{1}{k}) + b$이다.
- $\omega > \Omega$이면 $2 - \omega^2/\Omega^2 < 1$이므로 $h \le a(1+\frac{1}{k}) + b(2-\omega^2/\Omega^2) < a(1+\frac{1}{k}) + b$이다.
- $\omega = \Omega$이면 R에서 x항이 소거되어 $R/m = g + \Omega^2(a-h) + \Omega^2 b$는 상수이고, $R \ge 0$에서 정확히 $h \le a(1+\frac{1}{k}) + b$를 얻는다.

그러므로 어느 경우든

$$h \le a\left(1 + \frac{1}{k}\right) + b$$

이어야 하며, 이는 ω의 값에 관계없이 필요조건이다. $h - b$는 받침대 운동의 중심이 A 아래로 떨어진 깊이이고 $a(1+\frac{1}{k})$는 매달린 입자의 평형 위치의 깊이이므로, 이 결과는 받침대가 입자의 본래 평형 위치보다 낮지 않은 점을 중심으로 진동해야 한다는 뜻이다.

검산

- $a = 1, k = 2, g = 9.8$로 두고 자유 운동을 수치적으로 따라가면 $a\Omega^2 \approx 19.600$인 주기를 얻으며, 이는 $kg = 19.6$과 일치한다.
- 받침대가 정지해 있으면($b = 0$) 두 한계 모두 $h \le a(1+\frac{1}{k})$가 된다. 즉 받침대가 평형점보다 아래에 있으면 안 되며, 그렇지 않으면 용수철이 입자를 들어 올려 떼어 놓는다. 정확히 맞는 결과이다.

- $\omega = \Omega$에서 두 경우의 한계는 모두 $a(1 + \frac{1}{k}) + b$로 일치하며, 연속성에 의해 당연히 그래야 한다.

흔한 실수

- 운동의 최고점만 확인하는 것. 받침대가 느릴 때($\omega < \Omega$)에는 용수철이 가장 세게 위로 당기는 **최저점**에서 입자가 가장 떨어지기 쉽다.
- 용수철이 압축될 수 있다는 점을 잊는 것. 장력 공식 $kmg(h - x - a)/a$는 부호에 관계없이 성립하므로 경우를 따로 나눌 필요가 없다.

STEP 너머

이것은 사실 강제 진동자(forced oscillator)이다. 용수철은 입자를 고유 진동수(natural frequency) Ω로 진동시키려 하고, 받침대는 진동수 ω를 강요하며, 수직항력은 이 둘을 맞추는 데 필요한 힘이다. 대학의 진동 과목에서는 구동되는 계, 공명(resonance), 그리고 응답이 ω/Ω에 따라 어떻게 달라지는지를 공부한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)가 이러한 내용을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.