풀이

STEP III 2020, 문제 1

순수수학 • 점화 공식

> **STEP III 2020, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

소문항 (i)은 점화 적분 공식(reduction formula)이므로 부분적분(integration by parts)이 자연스러운 첫 수이다. $\cos x$의 거듭제곱은 미분하고 $\cos bx$는 적분한다. 그러면 곱 $\sin x \sin bx$가 남는데, $\cos(b-1)x$에 대한 삼각함수의 덧셈정리(compound-angle formula)를 쓰면 이것을 다시 처음과 같은 꼴의 적분으로 바꿀 수 있다. 소문항 (ii)에서는 새로운 것이 필요 없다. 점화식(recurrence)은 a와 b를 동시에 하나씩 줄이므로 차 $b-a=2m+1$이 고정되고, 따라서 n에서 $n+1$로 깔끔하게 넘어간다.

풀이

소문항 (i)

$a, b \geq 1$이라 하자. $u = \cos^a x$, $\mathrm{d}v = \cos bx\,\mathrm{d}x$로 두고 부분적분하면 $\mathrm{d}u = -a\cos^{a-1}x \sin x\,\mathrm{d}x$이고 $v = \frac{1}{b}\sin bx$이다($b \neq 0$이므로 문제없다).

$$\mathrm{I}(a,b) = \left[\frac{\cos^a x \sin bx}{b}\right]_0^{\pi/2} + \frac{a}{b}\int_0^{\pi/2} \cos^{a-1}x \sin x \sin bx\,\mathrm{d}x.$$

경계항(boundary term)은 양 끝에서 모두 0이 된다. $x=\frac{\pi}{2}$에서는 $\cos^a\frac{\pi}{2}=0$이기 때문이고(여기서 $a\geq 1$이 쓰인다), $x=0$에서는 $\sin 0 = 0$이기 때문이다.

> ? **생각해 보기** $\sin x \sin bx$를 어떻게 다시 x의 배수에 대한 코사인으로 바꿀 수 있을까?

$\mathrm{I}(a-1, b-1)$이 나타나기를 원하므로 $\cos(b-1)x$를 살펴보자.

$$\cos(b-1)x = \cos bx\cos x + \sin bx \sin x \quad\Longrightarrow\quad \sin x \sin bx = \cos(b-1)x - \cos x \cos bx.$$

이를 대입하면

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(a,b) &= \frac{a}{b}\int_0^{\pi/2} \cos^{a-1} x\, \cos(b-1)x\,\mathrm{d}x - \frac{a}{b}\int_0^{\pi/2} \cos^{a} x\, \cos bx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{a}{b}\,\mathrm{I}(a-1,b-1) - \frac{a}{b}\,\mathrm{I}(a,b).\end{aligned}$$

b를 곱하고 $\mathrm{I}(a,b)$ 항을 모으면 $(a+b)\,\mathrm{I}(a,b) = a\,\mathrm{I}(a-1,b-1)$이고, $a+b>0$이므로

$$\mathrm{I}(a,b) = \frac{a}{a+b}\,\mathrm{I}(a-1,b-1),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

좌변의 적분은 $\mathrm{I}(n,\, n+2m+1)$이다. 우변을

$$R(n,m) = (-1)^m\,\frac{2^n\, n!\,(2m)!\,(n+m)!}{m!\,(2n+2m+1)!}$$

로 나타내자. 음이 아닌 정수(non-negative integer) m을 하나 고정하고, 모든 $n \geq 0$에 대하여 $\mathrm{I}(n, n+2m+1) = R(n,m)$임을 n에 대한 수학적 귀납법(induction)으로 증명한다.

기저 단계(base case), $n=0$.

$$\mathrm{I}(0,2m+1) = \int_0^{\pi/2} \cos(2m+1)x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin((2m+1)\frac{\pi}{2})}{2m+1} = \frac{(-1)^m}{2m+1},$$

이는 $\sin(m\pi+\frac{\pi}{2}) = \cos m\pi = (-1)^m$이기 때문이다. 한편

$$R(0,m) = (-1)^m\,\frac{1\cdot 1\cdot (2m)!\,m!}{m!\,(2m+1)!} = \frac{(-1)^m}{2m+1}.$$

따라서 $n=0$일 때 결과가 성립한다.

귀납 단계(inductive step). 어떤 $k \geq 0$에 대하여 $\mathrm{I}(k, k+2m+1) = R(k,m)$이라 가정하자. 소문항 (i)을 $a = k+1$, $b = k+2m+2$에 적용한다. 둘 다 양의 정수이고, $a-1 = k$, $b-1 = k+2m+1$, $a+b = 2k+2m+3$이다.

$$\mathrm{I}(k+1,\, k+2m+2) = \frac{k+1}{2k+2m+3}\,\mathrm{I}(k,\, k+2m+1) = \frac{k+1}{2k+2m+3}\,R(k,m).$$

$k+2m+2 = (k+1)+2m+1$이므로, 좌변은 같은 m에 대하여 $n = k+1$일 때의 적분과 정확히 같다는 점에 주목하자.

? **생각해 보기** 공식에 따르면 $R(k+1,m)/R(k,m)$은 얼마가 되어야 할까?

R에서 $n = k$를 $n = k+1$로 바꾸어도 인수 $(-1)^m(2m)!/m!$은 변하지 않으며,

$$\begin{aligned}\frac{R(k+1,m)}{R(k,m)} &= \frac{2^{k+1}}{2^k}\cdot\frac{(k+1)!}{k!}\cdot\frac{(k+m+1)!}{(k+m)!}\cdot\frac{(2k+2m+1)!}{(2k+2m+3)!}\\ &= \frac{2(k+1)(k+m+1)}{(2k+2m+3)(2k+2m+2)} = \frac{k+1}{2k+2m+3},\end{aligned}$$

이다. 여기서 $2k+2m+2 = 2(k+m+1)$을 이용하였다. 따라서

$$\mathrm{I}(k+1,\, k+2m+2) = \frac{k+1}{2k+2m+3}\,R(k,m) = R(k+1,m),$$

이고, 이것이 바로 $n = k+1$일 때의 명제이다.

결과가 $n = 0$일 때 성립하고, $n = k$일 때 성립하면 $n = k+1$일 때도 성립하므로, 수학적 귀납법에 의하여 모든 음이 아닌 정수 n에 대하여 성립한다. m은 임의로 택한 것이었으므로 모든 음이 아닌 정수 m에 대해서도 성립한다.

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,\cos(n+2m+1)x\,\mathrm{d}x = (-1)^m\,\frac{2^n\,n!\,(2m)!\,(n+m)!}{m!\,(2n+2m+1)!}.$$

검산

- $n = 1$, $m = 0$으로 두면 공식은 $\frac{2\cdot1\cdot1\cdot1}{1\cdot3!} = \frac{1}{3}$을 준다. 직접 계산하면 $\cos x\cos 2x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x)$를 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 적분한 값은 $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}+1\right) = \frac{1}{3}$이다.
- $n = 1$, $m = 1$로 두면 공식은 $-\frac{2\cdot2\cdot2}{5!} = -\frac{1}{15}$을 주고, $\int_0^{\pi/2}\cos x\cos 5x\,\mathrm{d}x$를 수치적으로 계산하면 -0.066667이 나온다.
- (i)의 점화식과 (ii)의 닫힌 형태(closed form)는 $n \le 6$, $m \le 5$인 모든 경우에 대하여 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- 경계항이 왜 0이 되는지 밝히지 않는 것. 위끝에서는 $a \ge 1$이 필요하다.
- n에 대하여 귀납법을 쓰면서 m을 바꾸어 버리는 것. 소문항 (i)은 a와 b를 함께 줄이므로 m은 고정된 채로 남는다.
- $\sin\left((2m+1)\frac{\pi}{2}\right)$의 부호 실수. 이 값은 $1, -1, 1, \ldots$으로 번갈아 나타나며, 이것이 $(-1)^m$을 준다.

STEP 너머

이와 같은 점화 적분 공식은 점화 관계의 적분판이라 할 수 있다. 그리고 닫힌 형태는 월리스 곱(Wallis's product)이나 베타 함수(Beta function) $\int_0^{\pi/2} \cos^p x \sin^q x \, \mathrm{d}x$와 같은 방식으로 계승(factorial)의 비로 이루어지는데, 이는 대학의 해석학이나 응용수학 방법론 강의 초반에 만나게 된다. 이런 정신의 문제를 더 보고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.