풀이

STEP II 2020, 문제 9

역학 • 충돌하는 포물체

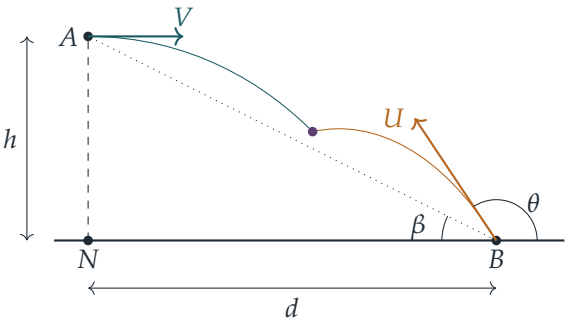
> **STEP II 2020, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

두 입자를 하나의 좌표계(coordinate system)에 놓고, 시각 t에서 각 입자의 위치를 적는다. 두 입자는 같은 아래 방향 가속도(acceleration) g를 받으므로, 높이를 비교하면 $-\frac{1}{2}gt^2$ 항이 소거된다. 즉 서로에 대해 보면 두 입자는 일정한 속도로 직선 운동을 한다. 따라서 충돌 시각이 매우 간단해지고, 이후의 각 소문항은 모두 이 사실에서 짧게 따라 나온다.

풀이

두 입자를 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 질점(point mass)으로 모형화한다. N을 원점(origin)으로 하고, x축을 NB 방향으로(따라서 $B = (d, 0)$, $A = (0, h)$), y축을 연직 위 방향으로 잡는다. A에서 출발한 입자는 B 쪽으로, B에서 출발한 입자는 N 쪽으로 움직이므로 두 입자의 수평 속도는 방향이 반대이다. 이것이 주어진 결과가 묘사하는 상황이다.



발사 후 시각 t에서 A에서 출발한 입자의 위치는

$$x_A = Vt, \qquad y_A = h - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

이고, B에서 출발한 입자의 위치는

$$x_B = d - Ut\cos\theta, \qquad y_B = Ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

이다. 두 좌표가 모두 일치하면 두 입자는 시각 T에 충돌한다. 높이가 일치하는 것은

$$h - \tfrac{1}{2}gT^2 = UT\sin\theta - \tfrac{1}{2}gT^2 \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{h}{U\sin\theta},$$

일 때이고, 이것이 가능한 유일한 충돌 시각이다(θ가 예각이므로 $\sin\theta > 0$). 같은 시각에 수평 위치도 일치해야 하므로

$$VT = d - UT\cos\theta \quad \Longrightarrow \quad (V + U\cos\theta)\,\frac{h}{U\sin\theta} = d.$$

양변에 $U\sin\theta$를 곱하면 $Vh + Uh\cos\theta = Ud\sin\theta$이고, U로 나누면

$$d\sin\theta - h\cos\theta = \frac{Vh}{U},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (i)

직각삼각형 ANB에서 $\tan\beta = h/d$이고 $0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$이다. V, h, U가 양수이므로, 앞에서 보인 결과로부터 $d\sin\theta - h\cos\theta > 0$이다. θ가 예각이므로 $d\cos\theta > 0$으로 나누면

$$\tan\theta > \frac{h}{d} = \tan\beta.$$

두 각 모두 tan가 순증가(strictly increasing)하는 구간 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에 있으므로 $\theta > \beta$이다.

소문항 (ii)

> **생각해 보기** 지금까지의 계산에서는 지면을 전혀 사용하지 않았다. 아직 부과하지 않은 물리적 조건은 무엇인가?

충돌은 어느 입자든 지면에 닿기 전에 일어나야 하므로, 시각 T에서의 공통 높이는 0 이상이어야 한다.

$$h - \tfrac{1}{2}gT^2 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad h \geq \frac{gh^2}{2U^2\sin^2\theta} \quad \Longleftrightarrow \quad U^2\sin^2\theta \geq \frac{gh}{2}.$$

(여기서 $h > 0$으로 나누고 $U^2\sin^2\theta > 0$을 곱했다.) $U\sin\theta > 0$이므로 양의 제곱근을 취하면

$$U\sin\theta \geq \sqrt{\frac{gh}{2}}.$$

등호는 두 입자가 지면에 닿는 바로 그 순간에 만나는 경우에 해당한다.

소문항 (iii)

$r = AB = \sqrt{d^2 + h^2}$라 하면 $d = r\cos\beta$, $h = r\sin\beta$이다. 그러면

$$d\sin\theta - h\cos\theta = r(\sin\theta\cos\beta - \cos\theta\sin\beta) = r\sin(\theta - \beta),$$

이고, 충돌 조건은

$$r\sin(\theta - \beta) = \frac{Vr\sin\beta}{U} \quad \Longrightarrow \quad \frac{U}{V} = \frac{\sin\beta}{\sin(\theta - \beta)}.$$

가 된다. 소문항 (i)에 의해 $\theta - \beta > 0$이고, 또 $\theta - \beta < \theta < \frac{1}{2}\pi$이다. 따라서 $0 < \sin(\theta - \beta) < 1$이고, $\sin\beta > 0$이므로

$$\frac{U}{V} = \frac{\sin\beta}{\sin(\theta - \beta)} > \sin\beta.$$

마지막 소문항

충돌 높이는 $h - \frac{1}{2}gT^2$이므로

$$\text{충돌 높이가 다음보다 높음: } \tfrac{1}{2}h \iff h - \tfrac{1}{2}gT^2 > \tfrac{1}{2}h \iff gT^2 < h.$$

B에서 출발한 입자의 연직 속도는 $U\sin\theta - gt$이므로

$$\text{다음 시각에 상승 중: } T \iff U\sin\theta - gT > 0 \iff gT < U\sin\theta.$$

생각해 보기 $gT < U\sin\theta$와 $gT^2 < h$를 어떻게 비교할 수 있을까?

충돌 시각 자체를 이용한다. $T = h/(U\sin\theta)$이므로 $U\sin\theta = h/T$이다. 따라서 $T > 0$을 곱하면

$$gT < U\sin\theta \iff gT < \frac{h}{T} \iff gT^2 < h.$$

두 조건이 모두 $gT^2 < h$와 동치이므로, 두 입자가 높이 $\frac{1}{2}h$보다 위에서 충돌할 필요충분조건은 충돌 순간에 B에서 출발한 입자가 아직 위로 움직이고 있는 것이다.

검산

- $g = 9.8$, $h = 10$, $d = 20$, $U = 20$, $\theta = \frac{1}{4}\pi$로 두자. 충돌 조건에서 $V = U(d\sin\theta - h\cos\theta)/h = 10\sqrt{2} \approx 14.14$이고, $T = 1/\sqrt{2} \approx 0.707$초이다. 이때 두 입자는 모두 $x = 10$, $y = 10 - 4.9 \times \frac{1}{2} = 7.55$에 있으며, 이는 $\frac{1}{2}h = 5$보다 위이다. B에서 출발한 입자의 연직 속도는 $10\sqrt{2} - 9.8/\sqrt{2} \approx 7.21 > 0$으로 상승 중이며, 마지막 소문항의 예측과 일치한다. 또한 $U/V = \sqrt{2} > \sin\beta = 1/\sqrt{5}$이다.

- 중력이 없을 때의 직관: $g = 0$이면 두 입자는 직선 운동을 하고, 조건 $U/V = \sin\beta/\sin(\theta-\beta)$는 A, B와 만나는 점이 이루는 삼각형에서의 사인 법칙(sine rule)일 뿐이다. 중력은 두 입자를 같은 양만큼 아래로 옮기므로 조건은 변하지 않는다.
- 컴퓨터로 h, d, U, θ를 수천 번 무작위로 골라 확인한 결과, 충돌과 세 부등식, 그리고 마지막 소문항의 동치가 모두 성립했다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 지면을 잊는 것: 이 부등식은 충돌 방정식이 아니라, 충돌이 높이 0 이상에서 일어나야 한다는 사실에서 나온다.
- 두 각이 모두 tan가 증가하는 예각이라는 말 없이 $\tan\theta > \tan\beta$에서 $\theta > \beta$를 결론짓는 것.
- 소문항 (iii)에서 $\sin(\theta-\beta) \le 1$에서 멈추는 것: 엄격한 부등식을 얻으려면 $\theta - \beta < \frac{1}{2}\pi$가 필요하다.

STEP 너머

$-\frac{1}{2}gt^2$ 항이 소거되는 것은 자유 낙하 기준계(freely falling frame of reference)로 바꾸는 것의 한 예이다. g로 가속하는 기준계에서는 중력이 사라지고 두 입자 모두 직선 운동을 한다. 이것은 대학 첫 역학 강의를 여는 갈릴레이 변환(Galilean transformation)과 가속 기준계 개념의 가장 간단한 경우이며, 나중에는 아인슈타인(Einstein)의 등가 원리(equivalence principle)의 출발점이 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 비관성 기준계(non-inertial frame)를 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.