풀이

# STEP II 2020, 문제 8

순수수학 • 다항식과 적분

> **STEP II 2020, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

## 핵심 아이디어

$\mathrm{F}' = \mathrm{f}$이므로 f의 모든 근은 F의 극점(turning point)이고, 각 넓이 조건은 그 극점 중 하나에서의 F의 값에 대한 명제가 된다. F가 0과 $c$에서 중근(double root)을 가진다는 것을 알고 나면, 합 $\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(c-x)$는 부호를 결정하는 하나의 인수 $c - 2h$로 정리된다. 이 부호를 $[0, c]$에서 F의 최댓값과 최솟값에 대해 알고 있는 사실과 비교하면 대칭성이 강제된다.

## 풀이

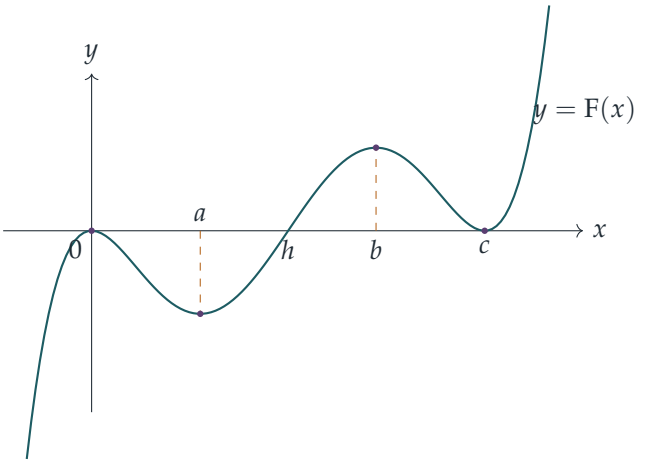
f는 최고차항의 계수가 1인 다항식(monic polynomial)이고 근이 $0, a, b, c$이므로 $\mathrm{f}(x) = x(x-a)(x-b)(x-c)$이다. 따라서 $(0,a)$에서 $\mathrm{f} < 0$, $(a,b)$에서 $\mathrm{f} > 0$, $(b,c)$에서 $\mathrm{f} < 0$이고, $x < 0$과 $x > c$에서 $\mathrm{f} > 0$이다. 0과 $a$ 사이의 넓이를 $A$라 하자. 주어진 조건은 $b$와 $c$ 사이의 넓이가 $A$이고 $a$와 $b$ 사이의 넓이가 $2A$라는 것이며, $A > 0$이다.

### 소문항 (i)

$\mathrm{F}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$이므로, $\mathrm{f} < 0$인 구간에서의 적분값은 그 구간에서의 넓이에 음의 부호를 붙인 것이다. 따라서

$$\mathrm{F}(0) = 0, \qquad \mathrm{F}(a) = -A, \qquad \mathrm{F}(b) = -A + 2A = A, \qquad \mathrm{F}(c) = A - A = 0.$$

$\mathrm{F}' = \mathrm{f}$이므로 F의 극점은 $x = 0, a, b, c$에 있다. f의 부호는 0과 $b$에서 $+$에서 $-$로 바뀌므로 이 점들은 극대(maximum)이고, $a$와 $c$에서 $-$에서 $+$로 바뀌므로 이 점들은 극소(minimum)이다. F는 최고차항의 계수(leading coefficient)가 양수 $\frac{1}{5}$인 5차 다항식(quintic)이므로 $x \to \pm\infty$일 때 $\mathrm{F}(x) \to \pm\infty$이다.




이 곡선은 $(0,0)$에서 극대, $x=a$에서 $y=-A$인 극소, $x=b$에서 $y=A$인 극대를 가지며, $(c,0)$에서 축에 접하는 극소를 가진다.

**F의 꼴.** F는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{5}$인 5차 다항식이다. $x=0$에서 $\mathrm{F}(0)=0$이고 $\mathrm{F}'(0)=\mathrm{f}(0)=0$이므로, $x=0$은 중복도(multiplicity)가 적어도 2인 근이다. 마찬가지로 $\mathrm{F}(c)=0=\mathrm{F}'(c)$이므로 $c$는 중복도가 적어도 2인 근이다. 이것으로 다섯 개의 일차 인수 중 네 개가 정해진다:

$$\mathrm{F}(x)=\tfrac{1}{5}x^2(x-c)^2(x-h)$$

여기서 $h$는 어떤 실수이다. 또한 $\mathrm{F}(a)=-A<0<A=\mathrm{F}(b)$이므로 F는 $a$와 $b$ 사이에 (양 끝점을 제외하고) 근을 가진다. 0과 $c$는 어느 것도 $(a,b)$에 속하지 않으므로 이 근은 $h$여야 한다. 따라서 $a<h<b$이고, 특히 $0<h<c$이다.

**합.** $(c-x)^2((c-x)-c)^2=x^2(x-c)^2$임에 주목하자. 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(x)+\mathrm{F}(c-x)&=\tfrac{1}{5}x^2(x-c)^2[(x-h)+(c-x-h)]\\&=\tfrac{1}{5}x^2(x-c)^2(c-2h).\end{aligned}$$

**소문항 (ii)**

$[0,c]$에서 F는 $[0,a]$에서 순감소하고, $[a,b]$에서 순증가하며, $[b,c]$에서 순감소한다. 따라서 $[0,c]$에서 최솟값은 $\mathrm{F}(a)=-A$이다. 다른 후보는 끝점에서의 값 $\mathrm{F}(c)=0>-A$뿐이기 때문이다. 이 최솟값은 $x=a$에서만 얻어진다. 그러므로 $0\le x\le c$에 대하여

$$\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(x)\ \ge\ \mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(a)=A-A=0$$

이고, $x\neq a$일 때는 등호가 성립하지 않는다.

**생각해 보기** $x$를 어떤 값으로 잡아야 $\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(x)$가 소문항 (i)의 합과 같은 꼴이 될까?

$x=c-b$로 잡자. $0<b<c$이므로 이 값은 $[0,c]$에 속한다. 소문항 (i)에 의하여

$$\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(c-b)=\tfrac{1}{5}b^2(b-c)^2(c-2h).$$

$c-b\neq a$이면 좌변은 양수이다. $\frac{1}{5}b^2(b-c)^2>0$이므로 $c-2h>0$이다. 따라서 요구한 대로 $c-b=a$이거나 $c>2h$이다.

이제 같은 논증을 뒤집어서 적용해 보자. $[0,c]$에서 F의 최댓값은 $\mathrm{F}(b)=A$로, 끝점에서의 값 $\mathrm{F}(0)=\mathrm{F}(c)=0$보다 크며, 이 최댓값은 $x=b$에서만 얻어진다. 그러므로 $0\leq x\leq c$에 대하여

$$\mathrm{F}(a)+\mathrm{F}(x)\leq \mathrm{F}(a)+\mathrm{F}(b)=0$$

이고, $x\neq b$일 때는 등호가 성립하지 않는다. $x=c-a\in[0,c]$로 잡으면 $\frac{1}{5}a^2(c-a)^2(c-2h)\leq 0$이고, $c-a\neq b$이면 등호가 성립하지 않는다. 따라서 $c-a=b$이거나 $c<2h$이다.

$c\neq a+b$이면 두 결론에서 $c>2h$와 $c<2h$가 동시에 나오므로 모순이다. 따라서 $c=a+b$이다. 그러면 $c-b=a$이므로

$$0=\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(a)=\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(c-b)=\tfrac{1}{5}b^2a^2(c-2h).$$

$a,b\neq 0$이므로 $c=2h$를 얻는다.

### 소문항 (iii)

$h=\frac{1}{2}c$이면 $\mathrm{F}(x)=\frac{1}{5}u\left(x-\frac{1}{2}c\right)$이다. 여기서 $u=x^2(x-c)^2$이고, 따라서 $u'=2x(x-c)(2x-c)$이다. 곱의 미분법(product rule)으로 미분하면

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(x)=\mathrm{F}'(x)&=\tfrac{1}{5}\left[2x(x-c)(2x-c)(x-\tfrac{1}{2}c)+x^2(x-c)^2\right]\\&=\tfrac{1}{5}x(x-c)[(2x-c)^2+x(x-c)]\\&=\tfrac{1}{5}x(x-c)(5x^2-5cx+c^2)\\&=x(x-c)(x^2-cx+\tfrac{1}{5}c^2).\end{aligned}$$

(따라서 $a,b=\frac{1}{2}c\mp\frac{c}{2\sqrt{5}}$이고, 실제로 둘을 더하면 $c$가 된다.)

**생각해 보기** 근들은 $x=\frac{1}{2}c$에 대하여 대칭이다. 이를 이용해 이계도함수를 쉽게 구할 수 있을까?

그렇다. $y=x-\frac{1}{2}c$로 놓자. 그러면 $x(x-c)=y^2-\frac{1}{4}c^2$이고 $x^2-cx+\frac{1}{5}c^2=y^2-\frac{1}{20}c^2$이므로

$$\mathrm{f}=(y^2-\tfrac{1}{4}c^2)(y^2-\tfrac{1}{20}c^2)=y^4-\tfrac{3}{10}c^2y^2+\tfrac{1}{80}c^4.$$

$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 1$이므로

$$\mathrm{f}''(x) = 12y^2 - \tfrac{3}{5}c^2$$

이고, 이는 정확히 $y^2 = \frac{1}{20}c^2$일 때 o이 된다. 이 점들에서 f의 인수 $y^2 - \frac{1}{20}c^2$가 o이 되므로 $\mathrm{f} = 0$이다. 각 점은 $y$에 대한 이차식(quadratic) f″의 단근(simple root)이므로 f″의 부호가 그 점에서 바뀌고, 따라서 이 점들은 진짜 변곡점(point of inflection)이다. 그러므로 두 변곡점은 모두 $x$축 위에 있다. 실제로 이 점들은 $(a, 0)$과 $(b, 0)$이다.

## 검산

- $c = 2$로 잡으면 $a = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.5528$이고 $b \approx 1.4472$이다. f를 수치 적분(numerical integration)하면 $[0, a]$, $[a, b]$, $[b, c]$에서의 넓이는 각각 0.05724, 0.11449, 0.05724이다. 바깥쪽 두 넓이는 같고, 각각 가운데 넓이의 절반이다.
- $a + b = c$와 $ab = \frac{1}{5}c^2$을 이용해 $x(x-a)(x-b)(x-c)$를 전개하면 소문항 (iii)의 식이 다시 나온다.
- $c = 2$일 때, $x = a \approx 0.5528$에서 f″의 유한 차분(finite-difference) 근삿값은 반올림 오차 범위 안에서 o이고, $x = 0.54$와 $x = 0.56$ 사이에서 부호가 바뀐다.

## 흔한 실수

- $\mathrm{F}(0) = \mathrm{F}(c) = 0$뿐 아니라 $\mathrm{F}'(0) = \mathrm{F}'(c) = 0$이라는 사실을 잊어서 중근을 놓치는 것.
- $0 < h < c$를 정당화하지 않는 것. $h$의 위치를 정해 주는 것은 $a$와 $b$ 사이에서 F의 부호가 바뀐다는 사실이다.
- 소문항 (ii)에서 첫 번째 부등식만 사용하는 것. 그 부등식은 "$c = a + b$ 또는 $c > 2h$"를 주는데, 이것만으로는 충분하지 않다. 논증을 마무리하려면 $\mathrm{F}(a)$를 이용한 반대 방향의 부등식이 필요하다.

## STEP 너머

소문항 (ii)의 논증은 최대·최소 정리(extreme value theorem)를 사용한다. 닫힌 구간에서 연속인 함수는 최댓값과 최솟값을 가지며, 여기서는 그 값을 어디에서 갖는지까지 정확히 알고 있다. 넓이 조건이 강제하는 이 4차식(quartic)의 $x = \frac{1}{2}c$에 대한 대칭성은, 적분 조건이 다항식의 모양을 결정할 수 있음을 보여 주는 한 예이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)는 최대·최소 정리와, F와 f를 연결하는 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)를 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.