풀이

STEP II 2020, 문제 7

순수수학 • 복소 변환

> **STEP II 2020, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

사상 $z \mapsto w = \dfrac{2}{z-2}$는 평행이동(shift)을 한 뒤 반전(inversion)을 하는 것이며, 반전은 원점을 지나지 않는 직선을 원점을 지나는 원으로 보낸다. w가 특정한 원 위에 있음을 증명하려면, 중심 c를 먼저 추측한 다음 $|w-c|$가 상수로 간단히 정리됨을 보이는 것이 가장 깔끔하다. $w-c$를 하나의 분수로 쓰면 분자와 분모가 서로 켤레복소수(complex conjugate)이거나 거의 그런 관계가 되는데, 바로 이 점 때문에 절댓값(modulus)이 상수가 된다.

풀이

풀이 전체에서 $|\alpha/\beta| = |\alpha|/|\beta|$와, 실수 x, y에 대하여 $|x+yi| = |x-yi| = |y+xi| = \sqrt{x^2+y^2}$임을 사용한다.

소문항 (i)

$z = 3+ti$이면 $z-2 = 1+ti$이므로

$$w - 1 = \frac{2}{1+ti} - 1 = \frac{2-(1+ti)}{1+ti} = \frac{1-ti}{1+ti}.$$

분자와 분모는 서로 켤레복소수이므로 절댓값이 $\sqrt{1+t^2}$로 같고, 이 값은 결코 0이 아니다. 따라서

$$|w-1| = \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}} = 1,$$

이고, 이 값은 t에 의존하지 않는다. 직선 $\mathrm{Re}(z) = 3$ 위의 모든 z는 어떤 실수 t에 대하여 $3+ti$의 꼴이므로, 그러한 모든 z에 대하여 점 w는 1로부터의 거리가 1이다. 즉 w는 중심이 1이고 반지름이 1인 원 위에 있다.

직선 V. 이제 $z = p + ti$이고, $a = p - 2$로 두면 편리하다. $p \neq 2$이므로 a는 0이 아닌 실수이다. 그러면 $z - 2 = a + ti$이고, 이는 결코 0이 아니다. $p = 3$일 때 중심은 $1 = 1/a$였으므로, 일반적인 경우에도 중심을 $1/a$로 두고 시도해 본다:

$$w - \frac{1}{a} = \frac{2}{a+ti} - \frac{1}{a} = \frac{2a - (a+ti)}{a(a+ti)} = \frac{a - ti}{a(a+ti)}.$$

이번에도 $|a - ti| = |a + ti|$이므로

$$\left| w - \frac{1}{p-2} \right| = \frac{1}{|a|} = \frac{1}{|p-2|}.$$

따라서 w는 다음과 같은 원 위에 있다.

$$\text{중심} \frac{1}{p-2}, \qquad \text{반지름} \frac{1}{|p-2|}.$$

반지름에 있는 절댓값 기호가 중요하다. $p < 2$이면 중심은 음의 실수축 위에 있지만, 반지름은 양수여야 하기 때문이다.

> **생각해 보기** $p = 3$인 경우를 미리 알려 주지 않았다면 중심 $1/(p-2)$를 어떻게 찾았을까?

점 $z = p (t = 0$인 경우)는 $w = 2/a$를 주고, $t \to \pm\infty$일 때 $w \to 0$이다. 이 두 점은 지름(diameter)의 양 끝에 있으므로(원은 실수축에 대하여 대칭이고, 이 두 점은 원 위에 있는 두 실수 점이다), 중심은 두 점의 중점인 $1/a$이다.

허수부(imaginary part)를 구하기 위해 분자와 분모에 켤레복소수를 곱한다:

$$w = \frac{2(a - ti)}{a^2 + t^2}, \qquad \text{따라서} \qquad \mathrm{Im}(w) = \frac{-2t}{a^2 + t^2}.$$

분모가 양수이므로 $\mathrm{Im}(w) > 0$일 필요충분조건은 $t < 0$이다. 따라서 V의 점 중 $\mathrm{Im}(w) > 0$인 점은 다음과 같다.

$$z = p + ti \text{에서} t < 0, \quad \text{즉} V \text{에서 실수축 아래쪽에 있는 점들} (\mathrm{Im}(z) < 0).$$

소문항 (ii)

이제 실수 s에 대하여 $z = s + qi$이고, $u = s - 2$로 두면 $z - 2 = u + qi$이며, $q \neq 0$이므로 이는 0이 아니다. 여기서 원의 두 "끝"은 $w = 0 (u \to \pm\infty$일 때)과 $w = 2/(qi) = -2i/q (u = 0$일 때)이므로, 중심이 $-i/q$일 것으로 짐작할 수 있다. 확인해 보자:

$$w + \frac{i}{q} = \frac{2}{u+qi} + \frac{i}{q} = \frac{2q + i(u+qi)}{q(u+qi)} = \frac{q + ui}{q(u+qi)}.$$

이제 $|q + ui| = \sqrt{q^2 + u^2} = |u + qi|$이므로

$$\left| w + \frac{i}{q} \right| = \frac{1}{|q|}.$$

따라서 w는 다음과 같은 원 위에 있다.

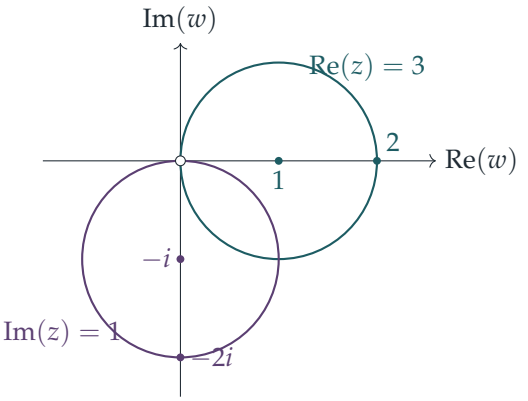
$$\text{중심} -\frac{i}{q}, \qquad \text{반지름} \frac{1}{|q|}.$$

실수부(real part)는

$$w = \frac{2(u-qi)}{u^2+q^2}, \qquad \text{따라서} \qquad \mathrm{Re}(w) = \frac{2u}{u^2+q^2},$$

이고, 분모는 양수이다. 따라서 $\mathrm{Re}(w) > 0$일 필요충분조건은 $u > 0$이며, 이는 다음 점들에 해당한다.

$$z = s + qi \text{에서} s > 2, \quad \text{즉} H\text{의 점 중 다음 직선의 오른쪽에 있는 점들: } \mathrm{Re}(z) = 2.$$



그림은 $\mathrm{Re}(z) = 3$의 상(image)(소문항 (i))과 $\mathrm{Im}(z) = 1$의 상($q = 1$인 소문항 (ii))을 보여 준다. 두 원 모두 원점을 지나지만, $2/(z-2) \neq 0$이므로 $w = 0$ 자체에는 결코 도달하지 않는다. 이 점은 직선을 따라 "무한히 먼 곳"에 있는 z에 대응한다.

검산

- V에 대한 공식에서 $p = 3$으로 두면 중심은 $1/(3-2) = 1$, 반지름은 1이 되어 첫 번째 결과와 일치한다.
- 특정 값 대입: $z = 3 - i$이면 $w = 2/(1-i) = 1 + i$이고, $|w-1| = 1$, $\mathrm{Im}(w) = 1 > 0$이므로 $t = -1 < 0$과 일치한다. $q = 1$인 H에서 $z = 3 + i$이면 $w = 1 - i$이고, 이 점은 $-i$로부터의 거리가 1이며, $3 > 2$이므로 실수부가 양수이다.
- $p \to 2$일 때 반지름 $1/|p-2|$는 커진다. 이때 직선 V는 무한대로 보내지는 점 $z = 2$가 까이를 지나므로, 그 상은 매우 커야 한다. 무작위로 고른 수천 개의 p, q와 각 직선 위의 점들로 컴퓨터 검사를 한 결과, 두 원과 두 부호 조건이 모두 확인되었다.

흔한 실수

- 반지름을 $1/(p-2)$나 $1/q$로 쓰는 것. 이 값은 $p<2$이거나 $q<0$일 때 음수가 된다.
- $\mathrm{Im}(w)$의 부호를 반대로 구하는 것. $z-2$로 나누면 실수축에 대한 대칭이동이 일어나므로, $\mathrm{Im}(w)$는 $\mathrm{Im}(z)$와 부호가 반대이다.

STEP 너머

사상 $z \mapsto 2/(z-2)$는 뫼비우스(Möbius) 변환(Möbius transformation) $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$의 하나이다. 이러한 사상은 항상 "일반화된 원"(generalised circles, 원과 직선)을 일반화된 원으로 보내며, 등각사상(conformal mapping)에서 쌍곡기하학(hyperbolic geometry)에 이르기까지 복소해석학(complex analysis) 첫 강좌의 기본적인 기하학적 도구이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에는 이 변환을 다룬 아름다운 장이 있으며, 그 그림들을 보면 이번 결과와 같은 사실이 자명해 보인다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.