풀이

STEP II 2020, 문제 6

순수수학 • 행렬의 거듭제곱과 대각합

> **STEP II 2020, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 7.4 절 **제자리로 돌아오는 행렬**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch07/finite-order.html

핵심 아이디어

모든 실수 2×2 행렬은 자기 자신의 특성방정식(characteristic equation)

$$\mathbf{M}^2 - t\,\mathbf{M} + \delta\,\mathbf{I} = \mathbf{0}, \qquad t = \operatorname{tr}(\mathbf{M}),\ \delta = \det(\mathbf{M}),$$

을 만족한다. 이것이 케일리–해밀턴 정리(Cayley–Hamilton theorem)이다(직접 곱해 보면 두 줄로 확인할 수 있다). 일단 $\mathbf{M}^2$을 $\mathbf{M}$과 $\mathbf{I}$로 나타내고 나면, $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$ 같은 방정식은 모두 "$t\mathbf{M}$이 $\mathbf{I}$의 상수배이다"라는 꼴이 되고, 따라서 $t = 0$이거나 $\mathbf{M}$ 자체가 $\mathbf{I}$의 상수배여야 한다. 소문항 (iii)과 (iv)는 소문항 (ii)를 $\mathbf{M}$ 대신 $\mathbf{M}^2$과 $\mathbf{M}^4$에 적용하면 얻어진다.

이 풀이 전체에서 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $t = a + d$, $\delta = ad - bc$로 둔다.

풀이

소문항 (i)

곱을 전개하면

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & bc + d^2 \end{pmatrix} = (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (ad - bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

이다. 예를 들어 $(a+d)a-(ad-bc)=a^2+bc$이고 $(a+d)b=ab+bd$이기 때문이다. 따라서

$$\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - \delta\mathbf{I}. \qquad (*)$$

$(*)$의 양변에 대각합(trace)을 취하고 $\mathrm{tr}(\mathbf{I})=2$를 이용하면

$$\mathrm{tr}(\mathbf{M}^2) = t\cdot t - 2\delta = \mathrm{tr}(\mathbf{M})^2 - 2\det(\mathbf{M}),$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. (직접 계산하면 $a^2+2bc+d^2=(a+d)^2-2(ad-bc)$이다.)

소문항 (ii)

첫 번째 동치, $(\Rightarrow)$. $\mathbf{M}^2=\mathbf{I}$이고 $\mathbf{M}\neq\pm\mathbf{I}$라고 하자. 이를 $(*)$에 대입하면

$$t\,\mathbf{M} = (1+\delta)\,\mathbf{I}.$$

만약 $t\neq 0$이면 양변을 나누어 실수 $k=(1+\delta)/t$에 대해 $\mathbf{M}=k\mathbf{I}$를 얻는다. 그러면 $\mathbf{M}^2=k^2\mathbf{I}=\mathbf{I}$에서 $k=\pm1$이므로 $\mathbf{M}=\pm\mathbf{I}$가 되는데, 이는 가정에서 배제된 경우이다. 따라서 $t=0$이고, 그러면 $(1+\delta)\mathbf{I}=\mathbf{0}$이므로 $\delta=-1$이다.

$(\Leftarrow)$. $t=0$이고 $\delta=-1$이면 $(*)$에서 $\mathbf{M}^2=0\cdot\mathbf{M}+\mathbf{I}=\mathbf{I}$이다. 또 $\mathrm{tr}(\pm\mathbf{I})=\pm2\neq0$이므로 $\mathbf{M}\neq\pm\mathbf{I}$이다.

두 번째 동치, $(\Rightarrow)$. $\mathbf{M}^2=-\mathbf{I}$이면 $(*)$에서 $t\mathbf{M}=(\delta-1)\mathbf{I}$이다. 만약 $t\neq0$이면 어떤 실수 k에 대해 $\mathbf{M}=k\mathbf{I}$이고, $\mathbf{M}^2=k^2\mathbf{I}=-\mathbf{I}$가 되려면 $k^2=-1$이어야 하는데, 실수 k에 대해서는 불가능하다. 따라서 $t=0$이고, 그러면 $\delta=1$이다.

$(\Leftarrow)$. $t=0$이고 $\delta=1$이면 $(*)$에서 곧바로 $\mathbf{M}^2=-\mathbf{I}$를 얻는다.

> **?** **생각해 보기** $\mathbf{M}$이 실수 행렬이라는 사실은 정확히 어디에서 쓰였는가?

두 번째 동치에서만 쓰였다. $k^2=-1$은 실수해를 갖지 않는다. 복소 행렬의 경우 $\mathbf{M}=\mathrm{i}\mathbf{I}$는 대각합이 $2\mathrm{i}\neq0$이면서 $\mathbf{M}^2=-\mathbf{I}$를 만족하므로, 이 결과는 성립하지 않는다.

소문항 (iii)

$(\Leftarrow)$는 바로 나온다. $\mathbf{M}^2=\pm\mathbf{I}$이면 $\mathbf{M}^4=(\pm\mathbf{I})^2=\mathbf{I}$이다.

$(\Rightarrow)$. $\mathbf{N}=\mathbf{M}^2$이라 하자. 이는 $\mathbf{N}^2=\mathbf{I}$를 만족하는 실수 2×2 행렬이다. $\mathbf{N}=\pm\mathbf{I}$이면 원하는 결과이고, $\mathbf{N}\neq\pm\mathbf{I}$이면 소문항 (ii)에 의해 $\det(\mathbf{N})=-1$이다. 그런데

$$\det(\mathbf{N}) = \det(\mathbf{M})^2 \geq 0,$$

이므로 두 번째 경우는 일어날 수 없다. 따라서 $\mathbf{M}^2=\pm\mathbf{I}$이다.

$\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$일 조건. 다시 $\mathbf{N} = \mathbf{M}^2$으로 두자. 소문항 (ii)의 두 번째 동치를 $\mathbf{N}$에 적용하면

$$\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I} \iff \mathrm{tr}(\mathbf{N}) = 0 \text{ 이고 } \det(\mathbf{N}) = 1.$$

소문항 (i)과 $\det(\mathbf{N}) = \delta^2$을 이용하면, 이 조건은

$$t^2 - 2\delta = 0 \quad \text{이고} \quad \delta^2 = 1.$$

이 된다. 이제 $\delta^2 = 1$에서 $\delta = \pm 1$이고, $t^2 = 2\delta \geq 0$이므로 $\delta = -1$은 불가능하다. 따라서 $\delta = 1$이고 $t^2 = 2$이다. 모든 단계가 동치였으므로

$$\boxed{\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I} \iff \det(\mathbf{M}) = 1 \text{ 이고 } \mathrm{tr}(\mathbf{M}) = \pm\sqrt{2}}.$$

소문항 (iv)

소문항 (iii)을 $\mathbf{M}^2$에 적용하면 $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I} \iff \mathbf{M}^4 = \pm\mathbf{I}$이므로, $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$를 만족하는 행렬은 정확히

$$\mathbf{M}^2 = \pm\mathbf{I} \qquad \text{또는} \qquad \det(\mathbf{M}) = 1,\ \mathrm{tr}(\mathbf{M}) = \pm\sqrt{2}.$$

인 행렬들이다. 회전(rotation)과 반사(reflection)는 **직교**(*orthogonal*) 행렬이다. 즉 그 열벡터들은 서로 수직인 단위벡터이다(회전의 행렬식(determinant)은 1, 반사의 행렬식은 -1이다). 따라서 위 목록에 속하면서 열벡터가 단위벡터가 아닌 행렬을 하나 찾기만 하면 된다. 예를 들어

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

은 대각합이 0이고 행렬식이 -1이므로 소문항 (ii)에 의해 $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$이고 (확인: $\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$), 따라서 $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$이다. 이 행렬의 두 번째 열 $(1, -1)$의 길이는 $\sqrt{2} \neq 1$이므로, 이 행렬은 회전도 반사도 아니다. (이것은 "비스듬한 반사"이다. x축 방향의 모든 벡터는 그대로 두고 $(1, -2)$ 방향의 모든 벡터는 방향을 뒤집는데, 이 두 방향은 서로 수직이 아니다.)

더 흥미로운 쪽의 예로는 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$이 있다. 행렬식이 1이고 대각합이 $\sqrt{2}$이므로 $\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$이고 $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$이지만, 첫 번째 열의 길이는 $\sqrt{3}$이다. 이것은 45° "찌그러진" 회전이다. 회전과 마찬가지로 위수(order)가 정확히 8이지만, 길이를 보존하지 않는다.

검산

- 45° 회전 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$은 행렬식이 1이고 대각합이 $\sqrt{2}$이며, 45°씩 네 번 돌리면 반바퀴 회전, 즉 $-\mathbf{I}$가 된다. 이는 소문항 (iii)과 들어맞는다.

- $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$을 제곱하면 $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$이 되는데, 이는 대각합이 0이고 행렬식이 1이므로 소문항 (ii)에 의해 그 제곱은 $-\mathbf{I}$이다.
- 성분이 $\{-3, -\frac{5}{2}, \ldots, 3\}$에 속하는 모든 행렬을 컴퓨터로 탐색하여, 소문항 (ii)의 두 동치와 소문항 (iii)의 첫 번째 동치가 정확히 성립함을 확인하였다.

흔한 실수

- $t = 0$인 경우를 먼저 처리하지 않고 t로 나누는 것. 소문항 (ii)의 논증 전체는 t가 0인지 아닌지에 따른 경우 나누기이다.
- 소문항 (iii)에서 $\det(\mathbf{M}^2) = \det(\mathbf{M})^2$이 음수일 수 없다는 사실을 잊는 것. 바로 이 사실이 $\mathbf{I}$의 "다른" 제곱근들을 배제한다.
- 소문항 (iv)의 예로 45° 회전을 드는 것. 이 행렬은 $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$를 만족하지만 바로 배제된 경우이다.

STEP 너머

항등식 $(*)$는 케일리–해밀턴 정리의 2×2 경우이다. 즉 모든 정사각행렬은 자신의 특성다항식(characteristic polynomial)을 만족한다. "어떤 $\mathbf{M}$이 $\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$를 만족하는가?" 같은 질문은 사실 고윳값(eigenvalue)에 관한 질문이다. 여기서 고윳값은 8제곱근 단위근(roots of unity)이어야 하며, 위수가 8인 실수 행렬은 회전 그 자체가 아니면서도 회전과 **닮음**(*similar*)이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)는 이러한 관점에서 고윳값, 닮음, 특성다항식을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.