풀이

STEP II 2020, 문제 5

순수수학 • 자릿수의 합과 나누어떨어짐

> **STEP II 2020, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

10의 모든 거듭제곱은 9로 나눈 나머지(remainder)가 1이므로, 어떤 수와 그 수의 자릿수의 합(digit sum)은 법(modulo) 9에 대하여 항상 같다. 이 사실 하나만으로 각 방정식이 강력한 나누어떨어짐 조건(divisibility condition)으로 바뀐다. 그다음 크기에 관한 논증으로 마무리한다. 자릿수의 합은 $9n$ 정도로만 커지지만 수 자체는 10^{n-1} 정도로 커지므로, 확인해야 할 후보는 몇 개밖에 남지 않는다.

풀이

소문항 (i)

$x = \sum_{r=0}^{n-1} a_r 10^r$, $\mathrm{d}(x) = \sum_{r=0}^{n-1} a_r$라 하면

$$x - \mathrm{d}(x) = \sum_{r=0}^{n-1} a_r \left(10^r - 1\right).$$

각 항에서 $a_r \geq 0$이고 $10^r - 1 \geq 0$이므로 합은 음이 아니다. 또한 $10^r - 1 = 99\ldots9$ (r개) $= 9 \times 11\ldots1$이므로 9로 나누어떨어진다($r = 0$이면 0이다). 따라서 모든 항이 9로 나누어떨어지고, 그러므로 $x - \mathrm{d}(x)$도 9로 나누어떨어진다. ■

합동식(congruence)의 언어로 쓰면, 모든 양의 정수 x에 대하여 $x \equiv \mathrm{d}(x) \pmod 9$이다. 아래에서 이 사실을 거듭 사용한다.

소문항 (ii)

동치(equivalence). $\mathrm{d}(x) \equiv x \pmod 9$이므로

$$x - 44\,\mathrm{d}(x) \equiv x - 44x = -43x \equiv 2x \pmod 9,$$

이다. 여기서 $-43 = -45 + 2$를 이용하였다. 따라서 $x - 44\,\mathrm{d}(x)$가 9의 배수일 필요충분조건은 $9 \mid 2x$이다. $\gcd(2, 9) = 1$이므로 $9 \mid 2x$일 필요충분조건은 $9 \mid x$이다. 이로써 양쪽 방향이 한꺼번에 증명된다. ■

범위. $x = 44\,\mathrm{d}(x)$이고 x가 n자리 수라고 하자. 각 자릿수는 많아야 9이므로 $\mathrm{d}(x) \le 9n$이고 $x = 44\,\mathrm{d}(x) \le 396n$이다. 또 n자리 수의 맨 앞자리 수는 $a_{n-1} \ge 1$이므로 $x \ge 10^{n-1}$이다. 이 둘을 합치면

$$10^{n-1} \le x \le 396n.$$

$n = 5$이면 $10\,000 \le 1980$이어야 하는데, 이는 거짓이다. 더욱이 어떤 $n \ge 5$에 대하여 $10^{n-1} > 396n$이면 $10^n = 10 \cdot 10^{n-1} > 3960n \ge 396(n+1)$이므로, 수학적 귀납법(induction)에 의하여 부등식 $10^{n-1} \le 396n$은 모든 $n \ge 5$에서 성립하지 않는다. 따라서 $n \le 4$이다. ■

> **생각해 보기** 9999 이하의 모든 수를 찾아보는 대신, 탐색 범위를 몇 개로 줄이려면 어떻게 해야 할까?

방금 증명한 동치를 이용한다. $x = 44\,\mathrm{d}(x)$이면 $x - 44\,\mathrm{d}(x) = 0$이고 이는 9의 배수이므로 $9 \mid x$이다. 그러면 $9 \mid 44\,\mathrm{d}(x)$이고, $\gcd(44, 9) = 1$이므로 반드시 $9 \mid \mathrm{d}(x)$이다. 따라서 $x = 44\,\mathrm{d}(x)$는 $44 \times 9 = 396$의 배수이다.

해 구하기. $n \le 4$이므로 $x \le 396 \times 4 = 1584$이고, 따라서 x는 396, 792, 1188, 1584 중 하나이다. 이들의 자릿수의 합은 모두 18이므로 어느 경우에나 $44\,\mathrm{d}(x) = 792$이다. 조건을 만족하는 것은 다음 하나뿐이다.

$$x = 792, \qquad \mathrm{d}(792) = 18, \quad 44 \times 18 = 792.$$

모든 해는 네 후보의 목록 안에 있고 그중 792만 조건을 만족하므로, 다른 값은 없다. ■

소문항 (iii)

$y = \mathrm{d}(x), z = \mathrm{d}(y)$라 하면 방정식은 $x = 107z$가 되고, $z = x/107 > 0$이다.

나누어떨어짐. 소문항 (i)에 의하여 $x \equiv y \equiv z \pmod 9$이다. 따라서

$$0 = x - 107z \equiv z - 107z = -106z \pmod 9.$$

그런데 $106 = 99 + 7$이므로 $9 \mid 7z$이고, $\gcd(7, 9) = 1$이므로 $9 \mid z$이다.

크기. 소문항 (i)에서 임의의 양의 정수 m에 대하여 $\mathrm{d}(m) \le m$도 얻는다. 따라서 x가 n자리 수이면 $z = \mathrm{d}(y) \le y \le 9n$이고,

$$10^{n-1} \le x = 107z \le 963n.$$

$n = 5$이면 $10\,000 \le 4815$이어야 하는데, 이는 거짓이다. 소문항 (ii)와 같은 귀납법 (이번에는 $10^n > 9630n \ge 963(n+1)$)으로 이 부등식이 모든 $n \ge 5$에서 성립하지 않음을 보일 수 있으므로 $n \le 4$이다.

> **생각해 보기** $z \le 36$이라는 범위로는 아직 9의 배수가 여러 개 남는다. 더 좁힐 수 있을까?

그렇다. 자릿수의 합을 한 번 더 적용하면 된다. $n \le 4$이면 $y = \mathrm{d}(x) \le 36$이다. $1, 2, \ldots, 36$ 중에서 자릿수의 합이 가장 큰 것은 $\mathrm{d}(29) = 11$이다. 37보다 작은 두 자리 수는 십의 자리 수가 많아야 3이고, 십의 자리 수가 3이면 일의 자리 수는 많아야 6이지만 (자릿수의 합은 많아야 9), 십의 자리 수가 2이면 $2 + 9 = 11$까지 가능하기 때문이다. 따라서 $1 \le z \le 11$이고, z는 9의 배수이다. 그러므로 $z = 9$이고

$$x = 107 \times 9 = 963.$$

확인: $\mathrm{d}(963) = 18$, $\mathrm{d}(18) = 9$이고 $107 \times 9 = 963$이다. 따라서 $x = 963$은 방정식을 만족한다. 모든 해는 $z = 9$이어야 하고, 따라서 $x = 963$이므로 다른 값은 없다. ■

검산

- 소문항 (i)을 예로 확인해 보자: $249 - 15 = 234 = 9 \times 26$.
- 컴퓨터로 모든 $x < 10^6$을 탐색하면 $x = 44\,\mathrm{d}(x)$의 해는 792뿐이고 $x = 107\,\mathrm{d}(\mathrm{d}(x))$의 해는 963뿐이며, 이는 위의 범위와 일치한다.
- $792 = 44 \times 18$이고 $963 = 107 \times 9$임에 주목하자. 나누어떨어짐 논증에서 요구하는 대로 둘 다 9의 배수이다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 x가 9의 배수라는 것만 결론짓는 경우. $\mathrm{d}(x)$도 9의 배수이고 따라서 $396 \mid x$라는 더 강한 사실이 있어야 탐색이 짧아진다.
- $n = 5$만 확인하고 $n \le 4$라고 쓰는 경우. 더 큰 모든 n에 대하여 10^{n-1}이 $396n$보다 계속 크다는 이유가 필요하다. 귀납법(또는 좌변은 10배씩 커지는데 우변은 많아야 $\frac{6}{5}$배씩 커진다는 관찰)이 그 이유를 제공한다.
- 소문항 (iii)에서 $z > 0$임을 잊는 경우. 바로 이 조건이 $z = 0$을 배제한다.

STEP 너머

$x \equiv \mathrm{d}(x) \pmod 9$라는 사실은 오래된 계산 검산법인 "구거법(casting out nines)"의 원리이다. 이는 10이 1처럼 행동하는 환(ring) $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$에서 계산하는 첫 번째 예이다. $10 \equiv -1$로 같은 아이디어를 적용하면 11로 나누어떨어지는지 판정하는 교대합 판정법을 얻는다. 어떤 수와 그 자릿수들의 함수가 섞인 방정식은 대개 여기서와 똑같이 푼다. 합동식으로 가능성을 줄이고, 증가 속도를 비교하여 후보 목록을 유한하게 만든다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*은 합동식에 대한 훌륭한 입문서이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.