풀이

STEP II 2020, 문제 4

순수수학 • 삼각부등식

> **STEP II 2020, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 것은 삼각부등식(triangle inequality)에 기초한다. 즉 각 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 엄격히 작다. 사실 확인해야 할 부등식은 하나뿐인데, 바로 **가장 긴** 변에 대한 부등식이다. 나머지 두 부등식은 자동으로 성립하기 때문이다. 역(converse)을 보이려면 컴퍼스로 삼각형을 작도한다. 한 변을 먼저 그리고, 그 양 끝에서 원 두 개를 그린다.

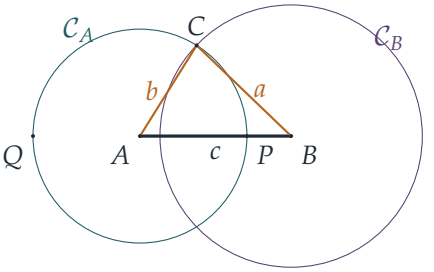
풀이

소문항 (i)

꼭짓점을 A, B, C라 하고 $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$라 하자. 선분 AB는 A에서 B로 가는 가장 짧은 경로이므로, 길이가 $b + a$인 경로 $A \to C \to B$는 c 이상이다. 그런데 이 값은 c와 같을 수 없다. 같아지는 것은 C가 선분 AB 위에 있을 때뿐이고, 그러면 삼각형이 만들어지지 않기 때문이다. 따라서 $c < a + b$이다. 나머지 두 쌍의 꼭짓점에 대해서도 같은 논리를 적용하면 $a < b + c$와 $b < a + c$를 얻는다.

소문항 (ii)

길이가 c인 선분 AB를 그린다. 중심이 A이고 반지름이 b인 원 $\mathcal{C}_A$와, 중심이 B이고 반지름이 a인 원 $\mathcal{C}_B$를 그린다. 두 원이 직선 AB 위에 있지 않은 점 C에서 만난다면, ABC는 $CA = b$, $CB = a$, $AB = c$인 삼각형이다.



두 원은 왜 반드시 만날까? $\mathcal{C}_A$가 직선 AB와 만나는 두 점을 P, Q라 하고, P는 A에 대하여 B와 같은 쪽에 있다고 하자. 그러면

$$PB = |c - b|, \qquad QB = c + b.$$

이다. 이제 $c - b < a$와 $b - c < a$는 주어진 부등식 가운데 두 개이므로 $|c - b| < a$이고, $c + b > a$는 세 번째 부등식이다. 따라서 한 점이 $\mathcal{C}_A$의 위쪽 반원을 따라 P에서 Q까지 움직이면, 그 점과 B 사이의 거리는 a보다 작은 값에서 a보다 큰 값으로 연속적으로(continuously) 변하므로 어딘가에서 a와 같아진다. 그 점은 두 원 위에 모두 있으며, 직선 AB 위에 있지 않다. $\mathcal{C}_A$ 위의 점 가운데 그 직선 위에 있는 것은 P와 Q뿐인데, 이 두 점과 B 사이의 거리는 a가 아니기 때문이다. 이 점이 바로 구하는 점 C이므로, 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형이 존재한다.

소문항 (iii)

소문항 (i)과 (ii)를 합치면, 세 양수가 어떤 삼각형의 세 변의 길이가 될 필요충분조건은 각 수가 나머지 두 수의 합보다 작은 것이다. 세 수 가운데 가장 큰 것을 ℓ이라 하자. ℓ이 나머지 두 수의 합보다 작으면, 나머지 두 부등식은 바로 따라 나온다. 더 작은 각 수는 ℓ 이하이고 남은 수는 양수이기 때문이다. 따라서 가장 긴 길이만 확인하면 된다.

(A) 항상 그렇다. 세 길이는 모두 양수이다. $c < a + b$를 이용하면

$$c + 1 < a + b + 1 < (a + 1) + (b + 1),$$

이고, 나머지 두 부등식도 같은 방법으로 얻는다.

(B) 그럴 때도 있지만 항상 그렇지는 않다. 정삼각형이면 세 길이는 $1, 1, 1$이고, 이는 삼각형을 이룬다. 하지만 $a = b = 1$, $c = \frac{1}{10}$으로 두면 $1 < 1 + \frac{1}{10}$이므로 이는 진짜 삼각형이다. 이때 세 길이는 1, 10, $\frac{1}{10}$이 되고, $10 > 1 + \frac{1}{10}$이므로 삼각형을 만들 수 없다.

(C) 결코 그렇지 않다. 세 길이는 a, b, c에 대하여 대칭(symmetric)이므로, $a \geq b \geq c$가 되도록 이름을 붙여도 된다. 그러면

$$|c-a| = a-c = (a-b)+(b-c) = |a-b|+|b-c|.$$

가장 긴 길이가 나머지 두 길이의 합과 같으므로 엄격한 부등식이 성립하지 않는다. (a, b, c 가운데 두 개가 같으면 길이 하나가 0이 되므로, 이 경우에도 성립하지 않는다.)

(D) 항상 그렇다. 집합 $\{a^2+bc,\ b^2+ca,\ c^2+ab\}$는 a, b, c 가운데 어느 두 개를 서로 바꾸어도 변하지 않는다. (예를 들어 a와 b를 바꾸면 b^2+ac, a^2+cb, c^2+ba가 된다.) 따라서 모든 삼각형에 대하여 세 부등식 가운데 하나, 이를테면 $a^2+bc < (b^2+ca)+(c^2+ab)$만 증명하면 충분하다. 두 변의 차는

$$\begin{aligned}(b^2+ca)+(c^2+ab)-(a^2+bc) &= (b^2-bc+c^2)+a(b+c)-a^2 \\ &= (b-\tfrac{1}{2}c)^2+\tfrac{3}{4}c^2+a(b+c-a).\end{aligned}$$

이다. $c>0$이므로 첫 번째 괄호 부분은 양수이고, $a>0$이고 $a<b+c$이므로 $a(b+c-a)>0$이다. 따라서 차는 양수이다. 나머지 두 부등식은 문자를 바꾸어 얻을 수 있고, 세 길이가 모두 양수인 것은 분명하므로, 이 세 길이는 항상 삼각형을 이룬다.

소문항 (iv)

a, b, c의 역할은 서로 바꿀 수 있으므로, $a \geq b \geq c$가 되도록 이름을 붙여도 된다. $f(a), f(b), f(c)$는 모두 양수이다. f가 증가함수(increasing function)이므로 $f(a) \geq f(b) \geq f(c)$이고, 따라서 소문항 (iii)의 첫머리에서 한 관찰에 따라

$$f(a) < f(b)+f(c).$$

만 보이면 된다.

> **?** **생각해 보기** $f(x)/x$에 대한 조건은 $f(a)$와 $f(b)+f(c)$를 비교하는 데 어떻게 도움이 될까?

이 조건을 이용하면 $f(b)$와 $f(c)$를 $f(a)$의 상수배로 아래에서 누를 수 있다. x가 증가할 때 $f(x)/x$는 감소하고 $a \geq b$이므로

$$\frac{f(b)}{b} \geq \frac{f(a)}{a}, \qquad \text{따라서} \qquad f(b) \geq \frac{b}{a} f(a),$$

이고, 등호는 $b=a$일 때만 성립할 수 있다. 같은 방법으로 $f(c) \geq \frac{c}{a} f(a)$이다. 두 식을 더하면

$$f(b)+f(c) \ \geq\ \frac{b+c}{a} f(a) \ >\ f(a),$$

이다. 여기서 마지막 단계에는 (삼각형에서 얻은) $b+c>a$와 $f(a)>0$을 이용하였다. 따라서 새로운 세 길이 가운데 가장 큰 것이 나머지 두 길이의 합보다 작으므로, $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$는 어떤 삼각형의 세 변의 길이이다.

검산

- (D)에서 $a=2, b=3, c=4$로 두어 보자. 세 길이는 16, 17, 22이고 $22<16+17$이다. 가장 긴 길이 c^2+ab에 맞게 문자를 바꾼 항등식은 차이가 $(a^2-ab+b^2)+c(a+b-c)=(4-6+9)+4\cdot 1=11$이라고 예측하며, 실제로 $16+17-22=11$이다.
- (C)에서 삼각형 3, 4, 5는 1, 1, 2를 주는데, 예측한 대로 정확히 납작한 삼각형이다.
- 무작위로 만든 삼각형 200 000개로 컴퓨터 검사를 해 보니 (A), (D), (C)가 (각각 항상, 항상, 결코) 확인되었고, (B)는 그 가운데 약 40%에서 성립하였으며, 소문항 (iv)도 $f(x)=\sqrt{x}$, $\ln(1+x)$, $x/(1+x)$, $x^{0.3}$, $1-\mathrm{e}^{-x}$에 대하여 확인되었다.

흔한 실수

- 삼각형 하나만 확인하고 (B)의 답을 "결코 그렇지 않다"나 "항상 그렇다"로 쓰는 것. "그럴 때도 있다"라는 답에는 두 종류의 예가 각각 하나씩 필요하다.
- (D)에서 부등식 하나만 확인하고 나머지 두 부등식이 왜 따라 나오는지 설명하지 않는 것. 이를 정당화하는 것은 대칭성(또는 가장 긴 변에 대한 관찰)이다.
- (iv)에서 a와 b가 같을 수도 있는데 $f(a)/a<f(b)/b$라고 쓰는 것. 이때 부등식은 $\leq$이고, 엄격한 부등식은 $b+c>a$에서 나와야 한다.

STEP 너머

삼각부등식은 **거리 함수**(metric)의 세 공리 가운데 하나이다. 거리 함수는 대학 1학년 해석학과 위상수학의 핵심에 있는 추상적인 거리 개념이다. 소문항 (iv)는 그 분야의 고전적인 사실이다. d가 거리 함수이고 f가 $f(0)=0$이며 $f(x)/x$가 감소하는 증가함수이면, $f\circ d$도 거리 함수이다. 이것이 $d/(1+d)$가 유계(bounded)인 거리 함수를 만드는 표준적인 방법인 이유이다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 이러한 개념을 처음 접하기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.