풀이

STEP II 2020, 문제 3

순수수학 • 로그 오목 수열

> **STEP II 2020, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

성질 L은 각 비 u_{r+1}/u_r가 바로 앞의 비보다 크지 않다는 것을 말한다. 따라서 수열이 한 번 증가를 멈추면 다시는 증가하기 시작할 수 없다. 이것이 바로 단봉성(unimodality)이다. 소문항 (ii)에서 점화식(recurrence relation)의 특성방정식(auxiliary equation)은 중근(repeated root) α를 가지며, 조합 $u_r - \alpha u_{r-1}$을 쓰면 이 점화식이 간단한 등비수열(geometric sequence)로 바뀐다. 나머지는 모두 이 치환 하나에서 따라 나온다.

풀이

소문항 (i)

수열이 성질 L을 가지고, $2 \le r \le n-1$에 대해 $u_{r-1} \ge u_r$라고 하자. $u_{r-1} > 0$이므로 성질 L의 양변을 이것으로 나눌 수 있다.

$$u_{r+1} \le \frac{u_r^2}{u_{r-1}} = u_r \cdot \frac{u_r}{u_{r-1}} \le u_r,$$

여기서 마지막 단계는 $u_r/u_{r-1} \le 1$과 $u_r > 0$을 이용한 것이다. 따라서 $u_{r-1} \ge u_r \implies u_r \ge u_{r+1}$이다.

이제 성질 L을 가지는 임의의 수열을 생각하자. $u_1 \le u_2 \le \cdots \le u_n$이면 이 수열은 $k = n$인 단봉 수열이다. 그렇지 않으면 $u_k > u_{k+1}$을 만족하는 첫 번째 첨자 k가 존재한다(따라서 $k \le n-1$이다). k의 선택에 의해

$$u_1 \le u_2 \le \cdots \le u_k.$$

$u_k \ge u_{k+1}$이므로 방금 증명한 함의를 ($r = k+1$로) 적용하면 $u_{k+1} \ge u_{k+2}$를 얻는다. 다

시 $r = k+2$로 적용하면 $u_{k+2} \geq u_{k+3}$을 얻고, 이와 같이 수학적 귀납법(induction)으로 $u_{n-1} \geq u_n$까지 얻는다. 그러므로 $u_k \geq u_{k+1} \geq \cdots \geq u_n$이고, 이 수열은 단봉 수열이다.

소문항 (ii)

$2 \leq r \leq n$에 대해 $v_r = u_r - \alpha u_{r-1}$이라 하자. $3 \leq r \leq n$이면 점화식에 의해

$$v_r = 2\alpha u_{r-1} - \alpha^2 u_{r-2} - \alpha u_{r-1} = \alpha\left(u_{r-1} - \alpha u_{r-2}\right) = \alpha v_{r-1}.$$

따라서 (v_r)는 공비가 α인 등비수열이고 $v_r = \alpha^{r-2} v_2$이다. 즉,

$$u_r - \alpha u_{r-1} = \alpha^{r-2}(u_2 - \alpha u_1) \qquad (2 \leq r \leq n).$$

($r = 2$일 때는 자명하게 성립하고, r가 하나 커질 때마다 양변에 α가 곱해진다.)

$2 \leq r \leq n-1$이면 $3 \leq r+1 \leq n$이므로 $u_{r+1} = 2\alpha u_r - \alpha^2 u_{r-1}$을 대입할 수 있다.

$$u_r^2 - u_{r-1}u_{r+1} = u_r^2 - 2\alpha u_r u_{r-1} + \alpha^2 u_{r-1}^2 = (u_r - \alpha u_{r-1})^2.$$

양수이며 단봉이다. $u_2 > \alpha u_1 > 0$이라 하자. $\alpha > 0$이므로 $u_1 > 0$이고, $u_2 > 0$이기도 하다. 그 뒤의 항들에 대해서는 첫 번째 항등식에서

$$u_r = \alpha u_{r-1} + \alpha^{r-2}(u_2 - \alpha u_1) > \alpha u_{r-1},$$

를 얻는다. $\alpha^{r-2} > 0$이고 $u_2 - \alpha u_1 > 0$이기 때문이다. 따라서 $u_{r-1} > 0$이면 $u_r > 0$이고, 귀납법에 의해 모든 항이 양수이다. 이제 두 번째 항등식에서 $2 \leq r \leq n-1$에 대해 $u_{r-1}u_{r+1} = u_r^2 - (u_r - \alpha u_{r-1})^2 \leq u_r^2$를 얻는다. 이것은 양수 항으로 이루어진 수열에 대한 성질 L이므로, 소문항 (i)에 의해 이 수열은 단봉 수열이다.

$u_1 = 1, u_2 = 2$인 경우. $w_r = (2-r)\alpha^{r-1} + 2(r-1)\alpha^{r-2}$라 하자. 그러면 $w_1 = 1 = u_1$이고 $w_2 = 2 = u_2$이다. 이 초깃값에서 첫 번째 항등식은 다음과 같다.

$$u_r = \alpha u_{r-1} + (2-\alpha)\alpha^{r-2}.$$

$3 \leq r \leq n$인 어떤 r에 대해 $u_{r-1} = w_{r-1}$이라 하자. 그러면

$$\begin{aligned} u_r &= \alpha\left[(3-r)\alpha^{r-2} + 2(r-2)\alpha^{r-3}\right] + 2\alpha^{r-2} - \alpha^{r-1} \\ &= (2-r)\alpha^{r-1} + 2(r-1)\alpha^{r-2} = w_r, \end{aligned}$$

이므로 귀납법에 의해 $1 \leq r \leq n$에 대해 $u_r = (2-r)\alpha^{r-1} + 2(r-1)\alpha^{r-2}$이다. (원래의 점화식을 이용해 두 단계 귀납법을 써도 되지만, 1계 형태를 쓰는 편이 더 빠르다.)

$\alpha = 1 - \frac{1}{N}$일 때의 최댓값. 이 경우 $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$이므로 $u_2 = 2 > \alpha = \alpha u_1 > 0$이고, 위에서 한 결과에 의해 이 수열은 양수이며 단봉이다. 최고점을 찾기 위해 이웃한 항의 차를 살펴보자. $u_{r+1} = \alpha u_r + (2-\alpha)\alpha^{r-1}$과 $\alpha - 1 = -\frac{1}{N}$으로부터

$$u_{r+1} - u_r = (2-\alpha)\alpha^{r-1} - \frac{u_r}{N} = \frac{\alpha^{r-2}}{N}\Big[N\alpha(2-\alpha) - (2-r)\alpha - 2(r-1)\Big].$$

그런데 $N\alpha = N - 1$이고 $2 - \alpha = \frac{N+1}{N}$이므로 $N\alpha(2-\alpha) = N - \frac{1}{N}$이며, $(2-r)\alpha = 2 - r - \frac{2-r}{N}$이다. 대괄호 안의 식은 다음과 같이 정리된다.

$$N - \frac{1}{N} - 2 + r + \frac{2-r}{N} - 2r + 2 = (N-r) - \frac{r-1}{N} = \frac{N^2 + 1 - r(N+1)}{N},$$

따라서

$$u_{r+1} - u_r = \frac{\alpha^{r-2}}{N^2}\Big(N^2 + 1 - r(N+1)\Big).$$

> **생각해 보기** $N^2 + 1 - r(N+1)$은 정확히 어디에서 부호가 바뀌는가? 또 이 값이 0이 될 수 있는가?

이 식이 0이 되는 것은 $r = \dfrac{N^2+1}{N+1} = N - 1 + \dfrac{2}{N+1}$일 때뿐이다. $N \ge 2$이므로 $0 < \frac{2}{N+1} < 1$이고, 따라서 이 값은 정수 $N-1$과 N 사이에 엄격하게 놓인다. $\alpha^{r-2} > 0$이므로

- $r \le N-1$이면 $u_{r+1} > u_r$이고,
- $r \ge N$이면 $u_{r+1} < u_r$이다.

그러므로 $u_1 < u_2 < \cdots < u_N$이고 $u_N > u_{N+1} > \cdots > u_n$이다. $N \le n$이므로 항 u_N이 존재하며, u_r는 $r = N$일 때 최대이다(엄격하게, 즉 같은 값을 갖는 항 없이).

검산

$N = 5$, 즉 $\alpha = \frac{4}{5}$로 두자. 점화식으로 계산하면 1, 2, 2.56, 2.816, 2.8672, 2.78528, 2.62144, ... 이 되어, 주장한 대로 $r = 5$에서 최고점에 이른 뒤 감소한다. 차에 대한 공식은 $u_6 - u_5 = \alpha^3(26-30)/25 = -0.08192$를 예측하며, 이는 실제 값과 일치한다. 또 $u_3 = 2\alpha \cdot 2 - \alpha^2 = 2.56$은 닫힌 형태(closed form) $-\alpha^2 + 4\alpha$와 일치한다. 두 항등식과 최고점의 위치는 컴퓨터로도 정확한 산술(exact arithmetic)을 사용하여 α, u_1, u_2의 여러 값과 29까지의 N에 대해 확인하였다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 u_{r-1}이 양수임을 언급하지 않고 그것으로 나누는 것. 음수 항이 있는 수열에서는 이 논증이 성립하지 않는다.

- 소문항 (ii)에서 양수 조건이 필요한 소문항 (i)을 인용하기 전에 항들이 양수임을 보이는 것을 잊는 것.
- $u_{N+1} < u_N$과 $u_{N-1} < u_N$만 보이는 것. 단봉성 덕분에 이것으로 충분하지만, 그렇다는 사실을 반드시 밝혀야 한다. 모든 차의 부호를 구하는 편이 더 깔끔하다.

STEP 너머

성질 L을 **로그 오목성**(*log-concavity*)이라 한다. 즉 $\ln u_r$가 r에 대한 오목함수(concave function)라는 뜻이다. 로그 오목 수열은 조합론과 확률론 곳곳에서 나타난다. 이항계수(binomial coefficients) $\binom{n}{r}$가 그 예이며, 뉴턴(Newton) 부등식은 실근만 가지는 다항식의 계수들이 로그 오목임을 말해 준다. 소문항 (ii)의 점화식은 중근을 가지는 선형 점화식(linear recurrence)이고, 그래서 해가 $(A + Br)\alpha^r$ 꼴이 된다. 이는 미분방정식(differential equation)에서 중근이 있을 때 $(A + Bx)\mathrm{e}^{\alpha x}$가 나타나는 것과 꼭 같다. 이 대응의 미분방정식 쪽에 대해서는 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)을, 이와 같은 성격의 문제들에 대해서는 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.