풀이

STEP II 2020, 문제 2

순수수학 • 변수분리형 미분방정식

> **STEP II 2020, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

이 미분방정식(differential equation)은 변수분리(separation of variables)가 되고, 적분한 뒤에는 곱 xy를 살펴보는 것이 자연스럽다. 이 곱은 2의 거듭제곱이 된다. 그러면 항등식 $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$를 이용해 모든 것을 합 $s=x+y$와 차 $d=x-y$로 다시 쓸 수 있다. 이 변수들로 쓰면 각 곡선은 "d^2은 s의 함수와 같다"라는 꼴이 되고, 개형은 그 함수가 음이 아닌 곳이 어디인지를 따져 보면 얻어진다.

풀이

소문항 (i)

우변을 인수분해한다.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y(kx-1)}{x(1-ky)} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1-ky}{y}\,\mathrm{d}y=\frac{kx-1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

적분하면 $\ln|y|-ky=kx-\ln|x|+c$, 즉

$$\ln|xy|=k(x+y)+c.$$

두 곡선 위에서 x와 y는 부호가 같으므로 $|xy|=xy$이다. $k=\ln 2$이므로 양변에 지수를 취하면 양의 상수 A에 대하여 $xy=A\,2^{x+y}$를 얻는다.

곡선 C_1. 점 $(1,1)$에서 $1=4A$이므로 $A=\frac{1}{4}$이고 $4xy=2^{x+y}$이다. 이제 $4xy=(x+y)^2-(x-y)^2$이므로

$$(x-y)^2=(x+y)^2-2^{x+y},$$

이고 $x,y>0$이다. 이것이 구하는 결과이다.

곡선 C_2. 점 $(-1,-1)$에서 $1 = A\cdot 2^{-2}$이므로 $A = 4$이고 $4xy = 16\cdot 2^{x+y} = 2^{x+y+4}$이다. 따라서

$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 2^{x+y+4},$$

이고 $x, y < 0$이다.

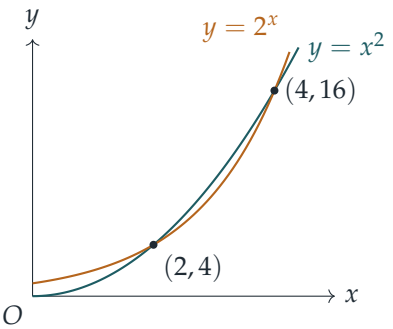
대칭성. x와 y를 서로 바꾸어도 $x+y$는 변하지 않고 $(x-y)^2 = (y-x)^2$도 변하지 않으므로 각 방정식은 그대로이다. 부호 조건($x, y > 0$ 또는 $x, y < 0$)도 그대로이다. 따라서 (a,b)가 곡선 위에 있으면 이 점을 $y = x$에 대하여 대칭이동한 (b,a)도 곡선 위에 있다. 그러므로 $y = x$는 각 곡선의 대칭축(line of symmetry)이다.

소문항 (ii)

$x \geq 0$에서 곡선 $y = x^2$과 $y = 2^x$는 $(2,4)$와 $(4,16)$에서 만난다. 교점은 이 두 점뿐이다. 이를 확인하기 위해 로그를 비교하자. $x > 0$에 대하여 $g(x) = 2\ln x - x\ln 2$라 하면 $g'(x) = \frac{2}{x} - \ln 2$이므로, g는 $x = 2/\ln 2$까지 증가하고 그 뒤로 감소한다. 따라서 g의 영점은 많아야 두 개이고, $g(2) = g(4) = 0$이다. 그러므로

$$x^2 \geq 2^x \iff 2 \leq x \leq 4 \qquad (x > 0),$$

이고, $[0,2)$와 $(4,\infty)$에서는 2^x가 x^2보다 위에 있다.



이제 C_1 위의 한 점을 잡고 $s = x + y > 0$이라 하자. C_1의 방정식의 좌변은 제곱이므로

$$s^2 - 2^s = (x-y)^2 \geq 0, \qquad \text{즉} \qquad s^2 \geq 2^s.$$

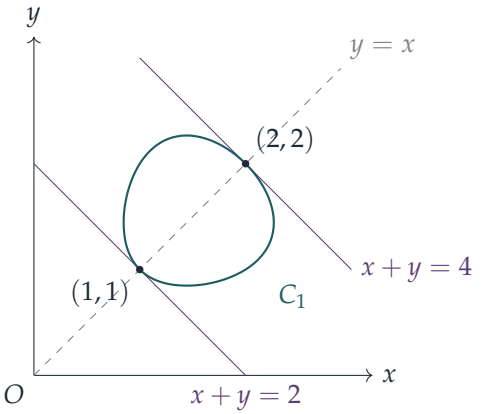
위의 그림에 따라 이로부터 $2 \leq s \leq 4$가 강제된다. 따라서 C_1은 두 직선 $x + y = 2$와 $x + y = 4$ 사이에 놓인다.

? **생각해 보기** $[2,4]$의 모든 s 값이 실제로 나타나는가? 그리고 양 끝에서 곡선은 어떤 모양인가?

각 $s \in [2,4]$에 대하여 $d = \pm\sqrt{s^2 - 2^s}$, $x = \frac{1}{2}(s+d)$, $y = \frac{1}{2}(s-d)$라 하자. $2^s > 0$이므로 $|d| < s$이고, 따라서 x와 y는 모두 양수이다. 그러므로 이러한 s마다 C_1 위의 점이 생기고, $2 < s < 4$일 때는 두 점이 생긴다. 따라서 이 곡선은 닫힌 고리(closed loop)이다.

- $s = 2$와 $s = 4$에서는 $d = 0$이므로 $y = x$ 위의 점 $(1,1)$과 $(2,2)$를 얻는다. 두 점 모두 $kxy - y = -(x - kxy)$를 만족하므로 그 점에서의 기울기(gradient)는 -1이다. 고리는 이 점들에서 직선 $x + y = 2$와 $x + y = 4$에 접한다.
- 기울기는 $x = 1/\ln 2 \approx 1.44$인 곳에서 0이고, $y = 1/\ln 2$인 곳에서 무한대이다. $x = 1/\ln 2$에서 고리의 y 값은 $y \approx 0.85$(가장 낮은 점)와 $y \approx 2.27$(가장 높은 점)이다.
- $y = x$를 가로지르는 방향의 폭이 가장 큰 곳은 $s^2 - 2^s$가 최대인 곳으로, $s \approx 3.21$이며 이 때 $|d| \approx 1.02$이다.

이 고리는 $y = x$에 대하여 대칭인 타원 모양의 곡선으로, 두 직선 사이에 끼어 있다.



소문항 (iii)

이번에는 $s = x + y < 0$이다. $t = -s > 0$이라 쓰자. 앞에서와 마찬가지로 다음이 필요하다.

$$s^2 \geq 2^{s+4} \iff t^2 \geq 2^{4-t} \iff t^2 2^t \geq 16.$$

함수 $t^2 2^t$는 $t > 0$에서 증가하고 $t = 2$에서 16이다. 따라서 조건은 $t \geq 2$, 즉 $x + y \leq -2$이다. (같은 말로, $x < 0$에서 $y = x^2$과 $y = 2^{x+4}$의 그래프를 그려 보면 포물선이 위에 있는 것은 $x \leq -2$일 때뿐이다.) 모든 $s \leq -2$에 대하여 (ii)와 같은 방법으로 $x, y < 0$인 두 점을 얻는다. 다만 $s = -2$에서는 한 점 $(-1,-1)$만 얻는다. 따라서 이번에는 C_2가 유계가 아니다(unbounded).

- 이 곡선은 $y = x$와 $(-1,-1)$에서만 만나고, 그 점에서의 기울기는 역시 -1이므로 그 점에서 직선 $x + y = -2$에 접한다.

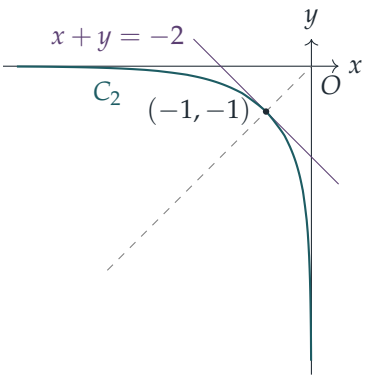
- $x, y < 0$이면 $kx - 1 < 0$이고 $1 - ky > 0$이므로

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y(kx-1)}{x(1-ky)} < 0,$$

  이다. 분자는 양수이고 분모는 음수이기 때문이다. 따라서 x가 증가하면 y는 계속 감소한다.

- $xy = 4 \cdot 2^{x+y}$로부터, $x \to -\infty$일 때 곱 xy는 0으로 가므로 $y \to 0^-$이다(실제로 $y \approx 4 \cdot 2^x / x$이다). 대칭성에 의해 $x \to 0^-$일 때 $y \to -\infty$이다. 음의 좌표축들이 점근선(asymptote)이다.

따라서 C_2는 제3사분면에 있는 직각쌍곡선(rectangular hyperbola)의 한 가지처럼 생겼지만, 좌표축에 훨씬 더 바짝 붙어 있다.



검산

- $4xy = 2^{x+y}$를 음함수 미분(implicit differentiation)하면 $4y + 4xy' = k\,2^{x+y}(1+y') = 4kxy(1+y')$이다. 정리하면 $y' = \dfrac{kxy - y}{x - kxy}$로, 처음의 방정식이 된다. C_2에 대해서도 똑같이 된다.

- $(2,2)$는 C_1 위에 있다: $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16 = 2^4$. C_2 위에서 $x + y = -4$인 점은 대략 $(-3.936, -0.064)$이고, 이때 $xy \approx 0.252$이며 $4 \cdot 2^{-4} = 0.25$이다. 위에서 제시한 타원 모양 곡선의 극점들은 컴퓨터로 확인하였다.

흔한 실수

- $1/x$와 $1/y$를 적분할 때 절댓값 기호를 빠뜨리는 것. C_2에서는 이것이 중요하며, 상수는 $\frac{1}{4}$가 아니라 $A = 4$가 된다.

- $(x+y)^2 \geq 2^{x+y}$만 보이고 멈추는 것. 이로부터 왜 $x+y$가 $[2,4]$에 갇히는지도 설명해야 하며, 바로 여기서 x^2과 2^x를 비교한 그래프가 필요하다.
- C_2를 좌표축과 만나도록 그리는 것. C_2 위에서는 두 좌표가 모두 음수로 유지되고, 좌표축은 점근선이다.

STEP 너머

좌표를 $s = x+y$, $d = x-y$로 회전하면 대칭인 방정식이 "$d^2 = f(s)$" 꼴로 바뀐다. 그러면 곡선은 정확히 $f(s) \geq 0$인 곳에 존재한다. 그 집합이 유계인 구간이면 곡선은 닫힌 고리이고, 반직선이면 유계가 아니다. 같은 논리로 보존량(conserved quantity)으로부터 상 초상(phase portrait)을 그릴 수 있다. $\ln(xy) - k(x+y)$는 모든 해를 따라 일정한데, 이는 로트카-볼테라(Lotka–Volterra) 포식자-피식자(predator–prey) 방정식에서 에너지가 하는 역할과 같으며, 그 궤도들도 같은 이유로 닫힌 고리가 된다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 두 아이디어를 모두 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.