풀이

STEP II 2020, 문제 11

확률과 통계 • 동전 던지기에서의 연속된 결과

> **STEP II 2020, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

이 게임은 기억이 거의 없다. 어느 순간에든 중요한 것은 마지막으로 나온 면이 무엇인지와 현재의 연속(run)이 얼마나 긴지뿐이다. 특히 나오는 면이 바뀌는 순간, 게임은 그 새로운 면이 맨 처음 던지기였던 경우와 정확히 같은 상황이 된다. 따라서 첫 번째 던지기에 대해 조건을 걸어(conditioning), 첫 던지기가 앞면일 때 A가 이길 확률을 첫 던지기가 뒷면일 때 A가 이길 확률로 나타내고, 그 반대도 마찬가지로 나타낸다. 그러면 두 개의 연립일차방정식(simultaneous linear equations)을 얻는다.

풀이

이 풀이 전체에서 $0 < p < 1$이다. ($p = 0$ 또는 $p = 1$이면 모든 던지기의 결과가 같으므로 게임은 두 번째 또는 세 번째 던지기에서 끝나고, 답은 자명하다.) 다음과 같이 놓는다.

$$\alpha = \mathrm{P}(\text{A가 이김} \mid \text{첫 던지기가 H}), \qquad \beta = \mathrm{P}(\text{A가 이김} \mid \text{첫 던지기가 T}).$$

각 던지기는 독립(independent)이므로, 어떤 던지기 이후에 일어나는 일은 앞으로 남은 던지기에만 의존한다.

소문항 (i)

게임은 끝난다. n번 던진 뒤에도 게임이 계속되려면 지금까지 연속한 두 던지기의 결과가 같은 경우가 없어야 한다. 즉 처음 n번의 던지기가 $HTHT\ldots$ 또는 $THTH\ldots$처럼 번갈아 나와야 한다. $n = 2m$이면 이 두 수열은 각각 앞면 m개와 뒷면 m개를 포함하므로

$$\mathrm{P}(2m\text{번 던진 뒤에도 끝나지 않음}) = 2p^m q^m = 2(pq)^m \leq 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^m,$$

이다. 여기서 $pq = p(1-p) = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$를 이용하였다. "게임이 결코 끝나지 않는다"는 사건은 이 사건들 모두에 포함되므로, 그 확률은 모든 m에 대하여 $2\left(\frac{1}{4}\right)^m$ 이하이고, $m \to \infty$로 보내면 그 확률이 0임을 알 수 있다.

첫 던지기가 앞면인 경우. 두 번째 던지기를 살펴보자.

- 확률 p로 앞면이 나오고, A가 곧바로 이긴다.
- 확률 q로 뒷면이 나온다. 이제 그 앞의 앞면은 의미가 없다. B는 뒷면이 한 번 더 나오면 되고 A는 앞면이 두 번 연속 나와야 하므로, 이 뒷면이 첫 던지기였던 경우와 정확히 같다. 따라서 이때 A가 이길 확률은 β이다.

마찬가지로 첫 던지기가 뒷면이면, 두 번째가 뒷면일 때 B가 곧바로 이기고, 두 번째가 앞면이면 "첫 던지기가 앞면"인 상황이 된다. 그러므로

$$\alpha = p + q\beta, \qquad \beta = p\alpha.$$

두 번째 식을 첫 번째 식에 대입하면 $\alpha = p + pq\,\alpha$이므로

$$\alpha = \frac{p}{1-pq},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다($1 - pq \geq \frac{3}{4} > 0$). 그러면 $\beta = \dfrac{p^2}{1-pq}$이다.

전체 확률. 첫 던지기에 대해 조건을 걸면

$$\mathrm{P}(\text{A가 이김}) = p\alpha + q\beta = \frac{p^2 + p^2 q}{1-pq} = \frac{p^2(1+q)}{1-pq}.$$

소문항 (ii)

이제 α와 β는 세 번 연속이 필요한 게임에 대한 것이다. 첫 던지기가 앞면이라고 하자.

- HH 다음에 H, 확률 p^2: A가 이긴다.
- 확률 pq인 HHT, 또는 확률 q인 HT: 처음 이후 첫 뒷면이 방금 나왔고 그 앞의 앞면들은 더 이상 의미가 없으므로, "첫 던지기가 뒷면"인 상황이 되어 A가 이길 확률은 β이다.

이 경우들이 모든 경우를 포함하므로

$$\alpha = p^2 + (q + pq)\,\beta,$$

이고, 이것이 주어진 결과이다. 두 면의 역할을 바꾸면("첫 던지기가 뒷면"인 상황에서 TTT는 B의 승리이므로 0을 기여한다)

$$\beta = (p + pq)\,\alpha.$$

생각해 보기 인수 $q + pq$와 $p + pq$는 어떻게 $1 - p^2$와 $1 - q^2$가 되는가?

$p + q = 1$이므로 $q + pq = q(1 + p) = (1 - p)(1 + p) = 1 - p^2$이고, 마찬가지로 $p + pq = p(1 + q) = 1 - q^2$이다. 이는 직접적으로도 이해할 수 있다. $1 - p^2$는 처음 앞면 다음의 두 던지기가 모두 앞면은 아닐 확률이며, 이는 정확히 연속이 끊어지는 경우이다. 따라서 방정식은

$$\alpha = p^2 + (1 - p^2)\beta, \qquad \beta = (1 - q^2)\alpha,$$

이고, 대입하면 $\alpha\left[1 - (1 - p^2)(1 - q^2)\right] = p^2$, 즉

$$\alpha = \frac{p^2}{1 - (1 - p^2)(1 - q^2)}.$$

($0 < 1 - p^2 < 1$이고 $0 < 1 - q^2 < 1$이므로 분모는 양수이다.) 마지막으로

$$\mathrm{P}(\text{A가 이김}) = p\alpha + q\beta = \alpha\left(p + q(1 - q^2)\right) = \alpha\left(p + q - q^3\right) = \alpha\left(1 - q^3\right),$$

이므로

$$\mathrm{P}(\text{A가 이김}) = \frac{p^2(1 - q^3)}{1 - (1 - p^2)(1 - q^2)},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (iii)

같은 논증이 길이 a와 b의 연속에 대해서도 성립한다. 첫 던지기가 앞면이면, 다음 $a - 1$번의 던지기가 모두 앞면이어서(확률 p^{a-1}) A가 이기거나, 그 사이에 뒷면이 나온다(확률 $1 - p^{a-1}$). 두 번째 경우에는 게임이 그 뒷면에서 다시 시작되는 것과 같으므로 "첫 던지기가 뒷면"인 상황이 된다. 마찬가지로 첫 던지기가 뒷면이면 B는 확률 q^{b-1}로 이기고, 그렇지 않으면 B의 연속이 완성되기 전에 앞면이 나온다. 따라서

$$\alpha = p^{a-1} + \left(1 - p^{a-1}\right)\beta, \qquad \beta = \left(1 - q^{b-1}\right)\alpha,$$

이고, 그러므로

$$\alpha = \frac{p^{a-1}}{1 - \left(1 - p^{a-1}\right)\left(1 - q^{b-1}\right)}.$$

이번에도 두 괄호의 값이 모두 0과 1 사이에 엄격히 놓이므로 분모는 양수이다. 그러면

$$p\alpha + q\beta = \alpha\left(p + q - q^b\right) = \alpha\left(1 - q^b\right),$$

이므로

$$\boxed{\mathrm{P}(\text{A가 이김}) = \frac{p^{a-1}\left(1 - q^b\right)}{1 - \left(1 - p^{a-1}\right)\left(1 - q^{b-1}\right)}}$$

원한다면 분모를 전개하여 $p^{a-1} + q^{b-1} - p^{a-1}q^{b-1}$로 쓸 수도 있다.

$a = b = 2$**인 경우.** 공식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{p(1-q^2)}{1-(1-p)(1-q)} = \frac{p(1-q)(1+q)}{1-pq} = \frac{p^2(1+q)}{1-pq},$$

여기서 분모에는 $1-p=q$, $1-q=p$를, 분자에는 $1-q=p$를 이용하였다. 이는 소문항 (i)의 결과와 일치한다. $a=b=3$을 대입하면 소문항 (ii)의 결과가 정확히 다시 나온다.

검산

- **공정한 동전, 소문항** (i). $p=q=\frac{1}{2}$이면 답은 $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}/\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$이고, 이는 대칭성에서 기대되는 값이다. (iii)에서도 $a=b$이고 $p=\frac{1}{2}$이면 언제나 같은 결과가 나온다.
- **극단적인 경우.** $p\to 1$이면 (iii)의 답은 1로 수렴하고, $p\to 0$이면 0으로 수렴한다. 당연히 그래야 한다.
- **수치.** $p=0.4$이면 소문항 (i)의 답은 $0.16\times 1.6/0.76\approx 0.3368$이고, 소문항 (ii)의 답은 ≈ 0.2713이다. 200 000번의 게임을 컴퓨터로 시뮬레이션하면 0.336과 0.271이 나왔다. $p=0.55$, $a=4$, $b=2$이면 공식은 0.2450을 주며, 이 역시 시뮬레이션 결과와 일치한다.

흔한 실수

- 면이 바뀌고 나면 그 전의 연속은 아무 의미가 없다는 점을 잊는 것. 바로 이 때문에 면이 바뀐 뒤의 상황이 "그 면이 첫 던지기"인 상황과 같다.
- (ii)에서 HHT인 경우를 빠뜨리는 것. 연속은 두 번째 **또는** 세 번째 던지기에서 끊어질 수 있다.
- "A가 이길 확률"의 최종 답으로 α를 제시하는 것. 첫 던지기에 대해 평균을 내어 $p\alpha+q\beta$를 구해야 한다.

STEP 너머

이것은 흡수 마르코프 연쇄(absorbing Markov chain)의 첫걸음 분석(first-step analysis)이다. 상태는 "현재의 면과 연속의 길이"이고, 흡수 확률은 다음 단계에 대해 조건을 걸어 얻은 일차방정식을 만족한다. 같은 기법으로 동전 던지기에서 특정 패턴이 나올 때까지의 기대 대기 시간을 구할 수 있으며, 이는 페니 게임(Penney's game)으로 이어진다. 페니 게임에서는 패턴들의 순서가 놀라운 비추이적(non-transitive) 결과를 낳는다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 마르코프 연쇄와 흡수를 알맞은 수준에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.