풀이

STEP II 2020, 문제 10

역학 • 에너지와 평형

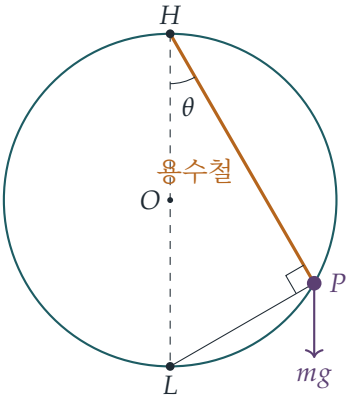
> **STEP II 2020, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

HL이 지름(diameter)이므로, 반원에 대한 원주각이 직각이라는 사실로부터 용수철의 길이와 P의 높이를 θ로 곧바로 나타낼 수 있다. 즉 $HP = 2a\cos\theta$이고, P는 H보다 $2a\cos^2\theta$만큼 아래에 있다. 철사는 매끄러우므로 철사의 수직항력(reaction)은 일을 하지 않는다. 따라서 문제 전체는 하나의 함수, 즉 $c = \cos\theta$의 함수로 본 위치 에너지(potential energy)에 관한 문제가 된다. 이 함수는 c에 대한 이차식이 되며, 완전제곱식으로 고치면(completing the square) 두 소문항이 한꺼번에 해결된다.

풀이

P를 매끄러운 철사 위의 입자로, 용수철을 (장력(tension)을 받든 압축(compression)을 받든) 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 가벼운 용수철로 모형화한다. 원의 중심을 O라 하자.



기하. HL이 지름이므로 $\angle HPL = 90°$이다. 따라서 빗변(hypotenuse)이 $2a$인 직각삼각형 HPL에서 다음이 성립한다.

$$HP = 2a\cos\theta.$$

H에서 P까지의 수직 낙차는 $HP\cos\theta = 2a\cos^2\theta$이다. P가 어느 쪽으로든 L에서 H를 향해 돌아갈 때 θ는 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 범위를 움직이므로 $\cos\theta > 0$이다.

위치 에너지. H를 중력 위치 에너지의 기준(0)으로 잡고 $c = \cos\theta$라 하자. 용수철의 늘어난 길이는 $2ac - l$이므로 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V &= -2mga\,c^2 + \frac{\lambda}{2l}(2ac - l)^2 \\ &= \frac{2a(a\lambda - mgl)}{l}\,c^2 - 2a\lambda\,c + \frac{\lambda l}{2}. \end{aligned}$$

소문항 (i)

매끄러운 철사의 수직항력은 일을 하지 않으므로, P는 정확히 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}\theta = 0$인 곳에서 평형(equilibrium)을 이룬다. (이는 접선(tangent) 방향의 힘이 균형을 이룬다는 것과 같다.) 연쇄 법칙(chain rule)에 의해 다음을 얻는다.

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}c} = -\sin\theta\left(\frac{4a(a\lambda - mgl)}{l}\,c - 2a\lambda\right).$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$인 $\theta = \alpha$에서는 $\sin\alpha \neq 0$이므로 괄호 안이 0이어야 한다.

$$\frac{4a(a\lambda - mgl)}{l}\cos\alpha = 2a\lambda.$$

우변이 0이 아니므로 $a\lambda \neq mgl$이고, 따라서 양변을 나눌 수 있다. 그러면 구하는 식

$$\cos\alpha = \frac{\lambda l}{2(a\lambda - mgl)},$$

을 얻는다.

이러한 α가 존재하려면 $0 < \cos\alpha < 1$이어야 한다.

- $\cos\alpha > 0$: 분자 λl이 양수이므로 $a\lambda > mgl$이어야 한다.
- $\cos\alpha < 1$: 양수 $2(a\lambda - mgl)$을 양변에 곱하면 $\lambda l < 2a\lambda - 2mgl$, 즉 $\lambda(2a - l) > 2mgl$이다.

$l < 2a$이므로 두 번째 조건은 $\lambda > \dfrac{2mgl}{2a - l}$이다. $\dfrac{2mgl}{2a - l} > \dfrac{2mgl}{2a} = \dfrac{mgl}{a}$이므로 이 조건은 첫 번째 조건도 함축한다. 따라서 $\alpha > 0$인 평형은 $\lambda > \dfrac{2mgl}{2a - l}$일 때에만 존재한다. (역으로 이 조건이 성립하면 위의 식은 실제 각 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$를 주며, 대칭성에 의해 $-\alpha$도 평형점이다.)

소문항 (ii)

생각해 보기 $\cos\alpha$가 저절로 드러나도록 V를 깔끔하게 나타내는 방법이 있을까?

있다. 완전제곱식으로 고치면 된다. $K = \dfrac{2a(a\lambda - mgl)}{l}$이라 하자. 소문항 (i)에서 $\dfrac{a\lambda - mgl}{l} = \dfrac{\lambda}{2\cos\alpha}$이므로 다음과 같다.

$$K = \frac{a\lambda}{\cos\alpha}, \qquad \frac{2a\lambda}{K} = 2\cos\alpha.$$

따라서

$$V = K\left(c^2 - 2c\cos\alpha\right) + \frac{\lambda l}{2} = \frac{a\lambda}{\cos\alpha}(c - \cos\alpha)^2 + \text{상수}.$$

(검산 삼아 보면, 이 식은 $c = \cos\alpha$에서 최솟값을 가지며, 이는 소문항 (i)에서 구한 평형점이다.) 평형이 존재하기 위해 소문항 (i)에서 요구한 대로 $a\lambda > mgl$이라 가정하면 $\cos\alpha > 0$이고 $K > 0$이다.

L에서는 $\theta = 0$, $c = 1$이다. L과 임의의 점 사이에 에너지 보존(conservation of energy)을 적용하면 다음을 얻는다.

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}mu^2 + \frac{a\lambda}{\cos\alpha}\left[(1 - \cos\alpha)^2 - (c - \cos\alpha)^2\right].$$

양변에 $\dfrac{\cos\alpha}{a\lambda} > 0$을 곱하면

$$\frac{mv^2\cos\alpha}{2a\lambda} = D - (c - \cos\alpha)^2, \qquad \text{여기서} D = (1 - \cos\alpha)^2 + \frac{mu^2}{2a\lambda}\cos\alpha. \qquad (*)$$

따라서 P가 $\theta = \beta$에서 멈춘다면 그곳에서 $v = 0$이므로

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 = (1 - \cos\alpha)^2 + \frac{mu^2}{2a\lambda}\cos\alpha,$$

이고, 이것이 구하는 방정식이다.

생각해 보기 이 방정식은 $\cos\beta$에 대해 근이 두 개이다. 실제로 멈추는 지점은 어느 쪽이며, 그 지점이 H보다 앞에 있는 것은 언제일까?

P가 L에서 H를 향해 올라가면 c는 1에서 0을 향해 감소한다. $(*)$에 의해 P는 $(c - \cos\alpha)^2 < D$인 동안 계속 움직이므로, c가 1에서부터 감소하다가 구간 $(\cos\alpha - \sqrt{D},\ \cos\alpha + \sqrt{D})$의 가까운 쪽 끝점에 닿는 곳에서 처음으로 멈춘다. 그런데 $D \geq (1 - \cos\alpha)^2$이므로($u > 0$이면 등호는 성립하지 않는다) $\cos\alpha + \sqrt{D} > 1$이고 $\cos\alpha - \sqrt{D} < 1$이다. 따라서 $c = 1$은 구간 안에 있고, 멈추는 지점의 값은 다음과 같다.

$$\cos\beta = \cos\alpha - \sqrt{D}.$$

P가 $H(c=0$인 곳$)$에 닿기 전에 멈추는 것은 정확히 이 값이 양수일 때, 즉 $\sqrt{D} < \cos\alpha$, 다시 말해 $D < \cos^2\alpha$일 때이다.

$$\begin{aligned} & (1-\cos\alpha)^2 + \frac{mu^2}{2a\lambda}\cos\alpha < \cos^2\alpha \\ \iff \quad & 1 - 2\cos\alpha + \frac{mu^2}{2a\lambda}\cos\alpha < 0 \\ \iff \quad & \frac{mu^2}{2a\lambda} < 2 - \sec\alpha, \end{aligned}$$

마지막 단계에서는 $\cos\alpha > 0$으로 나누었다. 따라서 P가 H에 닿기 전에 멈추는 것은 다음 조건이 성립할 때뿐이다.

$$u^2 < \frac{2a\lambda}{m}(2-\sec\alpha).$$

특히 이를 위해서는 $\sec\alpha < 2$, 즉 $\alpha < \frac{\pi}{3}$이어야 한다. 그렇지 않으면 L에서의 속력이 얼마이든 P는 H에 도달한다.

검산

- $($단위를 일관되게 하여$)$ $m=1$, $g=10$, $a=1$, $l=1$, $\lambda=40$으로 잡자. 그러면 $\lambda > 2mgl/(2a-l) = 20$이고 $\cos\alpha = 40/60 = \frac{2}{3}$이다. 임계값은 $u^2 = 80(2-\frac{3}{2}) = 40$이다. $u^2=40$이면 $D = \frac{1}{9} + \frac{40}{80}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$이므로 $\cos\beta = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$이다. 입자는 마땅히 그래야 하듯 H에 겨우 도달한다.
- $u=0$이면 $D = (1-\cos\alpha)^2$이고 $\cos\beta = 1$이다. L에 정지해 있는 입자는 그대로 머무르는데, L 또한 평형점이므로 옳은 결과이다.
- 무작위로 고른 여러 매개변수 조합에 대해 운동 방정식을 컴퓨터로 수치 적분해 보았더니, 입자는 정확히 u^2이 임계값보다 작을 때 예측한 $\cos\beta$에서 멈추었다.

흔한 실수

- $HP = 2a\sin\theta$로 잡거나, 잘못된 각으로 O로부터의 높이를 재는 것. 중심각은 θ가 아니라 2θ임을 기억하자.
- 소문항 (i)에서 $\cos\alpha > 0$만 확인하는 것. λ의 범위를 주는 것은 $\cos\alpha < 1$이라는 조건이다.
- $\cos\beta$로 근 $\cos\alpha + \sqrt{D}$를 고르는 것. 이 값은 1보다 크므로 철사 위의 위치가 아니다.

STEP 너머

에너지를 $K(c-\cos\alpha)^2+$ 상수 꼴로 쓰는 것은 대학 역학의 핵심 아이디어를 일차원에서 구현한 것이다. 자유도(degree of freedom)가 하나인 계에서 평형점은 퍼텐셜의 정류점(stationary point)이고, 그 안정성(stability)은 그 점이 극소인지 극대인지에 따라 정해지며, 운동이 가능한 영역은 에너지가 퍼텐셜보다 큰 곳이다. 여기서 $\alpha>0$이 존재하면 L은 V의 극대점이 되므로 불안정한 평형점이 된다. 용수철 때문에 철사의 맨 아래 지점이 불안정해지는 것이다! Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 에너지 도표와 안정성을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.